HöMa I+II Repetitorium
Mitschrift

Dieses Dokument ist eine private Mitschrift des Mathematik-Repetitoriums für Elektrotechniker im Sommersemester 2001 an der RWTH-Aachen, gehalten von Dr. Heep. Es behandelt vorraussichtlich den Stoff des ersten und zweiten Semesters „Höhere Mathematik für Elektrotechniker und Physiker“. Wie bereits erwähnt ist dies eine private Mitschrift von meiner Wenigkeit (Daniel Steinberger). Ich garantiere nicht für Korrektheit oder Vollständigkeit. Ich bin jedoch für (Rechtschreib- sowie Inhaltliche) Fehler- und Layoutkorrekturhinweise dankbar, und werde diese eventuell bei Bedarf in einer neuen Revision dieses Dokumentes umsetzen.

Layout und Inhalt wurden im Wintersemester 2003/04 von Eric Plum überarbeitet.

Diese Dokument wurde aus den TeX-Sourcen übersetzt am

29. Juli 2004

Je älter das Datum, desto fehlerfreier und vollständiger sollte das Dokument sein. Die neueste Version solltet Ihr auf meiner Page finden, die URL und meine eMail-Adresse steht unten, sowie am Ende des Dokumentes.

Vorlesung 1 - 05.09.2001

Aufgabe 1 Man beweise z.B. mit Hilfe der vollständigen Induktion

$$\sum_{k=1}^{n} k3^k = \frac{1}{4}\Big(3 + (2n-1)3^{n+1}\Big) \qquad \text{für } n \in \mathbb{N}$$

Beweis:

$$\sum_{k=1}^{1} k3^k = 3$$

und

$$\frac{1}{4}\Big(3 + (2n-1)3^{n+1}\Big)\Big|_{n=1} = \frac{1}{4}(3+9) = 3$$

$\surd$ (wahr)

$\mathcal{M}$ aus $\mathbb{N}$ sei die Menge, für die die Behauptung gilt $\Rightarrow 1 \in \mathcal{M}$

Sei $n \in \mathcal{M}$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1} k3^k &= \sum_{k=1}^{n} k3^k + (n+1)3^{n+1} \\
&= \frac{1}{4}\Big(3 + (2n-1)3^{n+1}\Big) + (n+1)3^{n+1} \\
\text{nach Annahme} \\
&= \frac{1}{4}\bigg(3 + \Big((2n-1) + 4(n+1)\Big)3^{n+1}\bigg) \\
&= \frac{1}{4}\Big(3 + (6n+3)3^{n+1}\Big) \\
&= \frac{1}{4}\Big(3 + (2n+1)3^{n+2}\Big)
\end{aligned}$$

$\Rightarrow n+1 \in \mathcal{M} \Rightarrow$ Behauptung

Aufgabe 2 Man beweise mit vollständiger Induktion

$$\prod_{k=2}^{n} \frac{k^3-1}{k^3+1} = \frac{2}{3}\frac{n^2+n+1}{n(n+1)} \qquad \text{für } n \geq 2$$

Beweis:

n=2:

$$\prod_{k=2}^{2} \frac{k^3-1}{k^3+1} = \frac{8-1}{8+1} = \frac{7}{9}$$

und

$$\frac{2}{3}\frac{n^2+n+1}{n(n+1)}\Big|_{n=2} = \frac{2}{3} * \frac{7}{6} = \frac{7}{9}$$

$\surd$ (wahr)

$\mathcal{M} \subset \mathbb{N} \setminus \{1\}$ sei die Menge, für die die Behauptung gilt $\Rightarrow 2 \in \mathcal{M}$

Sei $n \in \mathcal{M}$. Dann gilt:

$$\prod_{k=2}^{n+1} \frac{k^3-1}{k^3+1} = \prod_{k=2}^{n} \frac{k^3-1}{k^3+1} * \frac{(n+1)^3-1}{(n+1)^3+1}$$

$$= \frac{2}{3}\frac{n^2+n+1}{n(n+1)} * \frac{n^3+3n^2+3n+1-1}{n^3+3n^2+3n+2}$$

nach Annahme

$$= \frac{2}{3}\frac{n^2+n+1}{n+1} * \frac{n^2+3n+3}{(n+2)(n^2+n+1)}$$

da $(n^3+3n^2+3n+2):(n+2) = n^2+n+1$

$$\begin{array}{l} \underline{-(n^3+2n^2)} \\ \qquad n^2+3n+2 \\ \quad \underline{-(n^2+2n)} \\ \qquad\qquad n+2 \end{array}$$

$$= \frac{2}{3}\frac{(n+1)^2+(n+1)+1}{(n+1)(n+2)} \qquad \Rightarrow n+1 \in \mathcal{M} \qquad \Rightarrow \text{Behauptung}$$

Aufgabe 3 Man bestimme die Menge $\mathcal{M}$ aller $z \in \mathbb{C}$ die durch $0 < i(\frac{1}{z} - \frac{1}{\overline{z}})\text{Re } z < 1$ beschrieben wird, und skizziere sie.

Es gilt: $z = x + iy$

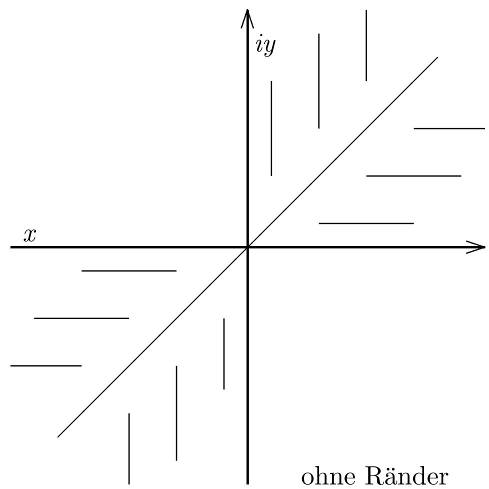
$$\begin{aligned} \Longrightarrow i\left(\frac{1}{z} - \frac{1}{\overline{z}}\right)\text{Re } z &= i\left(\frac{\overline{z}}{|z|^2} - \frac{z}{|z|^2}\right)x \\ &= i\frac{x-iy-(x+iy)}{x^2+y^2}x \qquad \text{da } |z|^2 = z * \overline{z} = x^2+y^2 \\ &= \frac{-2i^2y}{x^2+y^2}x = \frac{2xy}{x^2+y^2} \end{aligned}$$

d.h.

$$0 < \frac{2xy}{x^2+y^2} < 1 \Longleftrightarrow 0 < 2xy < x^2+y^2 \qquad \text{da } x^2+y^2 > 0$$

$\Longleftrightarrow xy > 0$, d.h. **1. + 3. Quadrant** und $x^2+y^2-2xy = (x-y)^2 > 0$, d.h. $x \neq y$

$\Longrightarrow M = \left\{ z = x+iy \;\middle|\; xy > 0 \textbf{ und } x \neq y \right\}$



Aufgabe 4 Man bestimme die Menge M aller $z \in \mathbb{C}$, die durch

$$|z - i + 1| > |z + i - 1| > \frac{1}{\sqrt{2}}|z - 2 + 2i|$$

beschrieben wird, und skizziere sie.

$z = x + iy:$

$\Rightarrow |z - i + 1| > |z + i - 1| \Longleftrightarrow |z - i + 1|^2 > |z + i - 1|^2$

$\Leftrightarrow \overbrace{(x+1)^2}^{x^2+2x+1} + \overbrace{(y-1)^2}^{y^2-2y+1} > \overbrace{(x-1)^2}^{x^2-2x+1} + \overbrace{(y+1)^2}^{y^2+2y+1}$

$\Leftrightarrow 2x - 2y > -2x + 2y$

$\Leftrightarrow 4x > 4y \Leftrightarrow x > y$

und

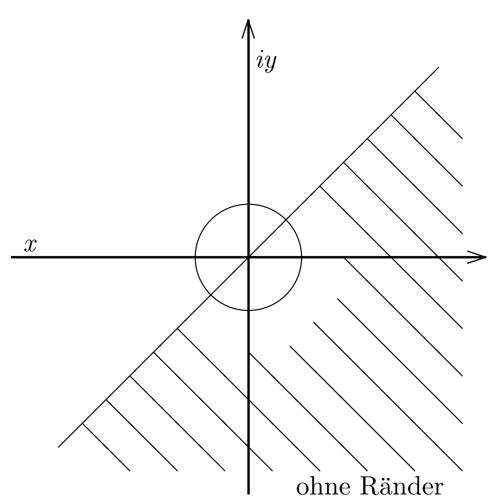
$|z + i - 1| > \frac{1}{\sqrt{2}}|z - 2 + 2i| \Leftrightarrow |z + i - 1|^2 > \frac{1}{2}|z - 2 + 2i|^2$

$\Leftrightarrow (x - 1)^2 + (y + 1)^2 > \frac{1}{2}\left((x - 2)^2 + (y + 2)^2\right)$

$\Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 + y^2 + 2y + 1 > \frac{1}{2}(x^2 + 4x + 4 + y^2 + 4y + 4)$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2 > 2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 > 4$

$\Rightarrow M = \left\{z = x + iy \;\middle|\; x > y \text{ und } x^2 + y^2 > 4\right\}$



$$\text{Kreisgleichung: } (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = x^2$$
$$|z - z_0| = z_0 = x_0 + iy_0$$

Aufgabe 5 Man bestimme den Lotfußpunkt des Punktes $P : \vec{p} = \begin{pmatrix} 4 \\ -6 \\ 13 \end{pmatrix}$ bezüglich der Ebene $E : x - 2y + 4z = 5$ und den Abstand des Punktes P von E.

Es gilt:

$$<\vec{x}, \vec{n}>= d \;\; \text{ist } \textbf{Hessische Normalform} \text{ von E}$$

mit $\vec{n} \perp E,\ |\vec{n}| = 1$

$$|d| = \text{ Abstand von } E \text{ zum Nullpunkt}$$

$\Rightarrow$ Gerade g durch $P \perp E$:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ -6 \\ 13 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}$$

Schnittpunkt mit E, d.h. g in E einsetzen

$x - 2y + 4y^2 = 5$

$\Rightarrow (4 + t) - 2(-6 - 2t) + 4(13 + 4t) = 5$

d.h. $\;\; 21t = -63,\ t = -3$

$\Rightarrow \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ -6 \\ 13 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ -12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ Lotfußpunkt $\vec{x}(-3) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

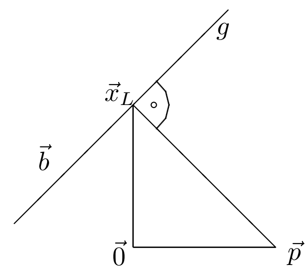
$\Rightarrow$ Abstand P von E:

$$|\vec{x}(-3) - \vec{p}| = \left| \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ -6 \\ 13 \end{pmatrix} \right|$$

$$= \left| \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ -12 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{9 + 36 + 144} = \sqrt{189} = 3\sqrt{21}$$

Aufgabe 6 Man bestimme den Lotfußpunkt des Punktes $P : \vec{p} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 7 \end{pmatrix}$ bezüglich der Geraden $g : \vec{x} = \begin{pmatrix} -6 \\ 8 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$, $t \in \mathbb{R}$, und den Abstand des Punktes P von der Geraden g.

Es gilt:



Bedingung für Lotfußpunkt

$$<\vec{x}_L - \vec{p}, \vec{b}> = 0$$

$$\Rightarrow \quad < \begin{pmatrix} -6 \\ 8 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} > \overset{!}{=} 0$$

d.h. $(-6 - t - 1)(-1) + (8 + 3t + 3)3 + (1 + 2t - 7)2 = 0$

$\Rightarrow 14t + 28 = 0$, d.h. $t = -2$

$\Rightarrow$ Lotfußpunkt $\vec{x}(-2) = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ Abstand P von g:

$$|\vec{x}(-2) - \vec{p}| = \left| \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 7 \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} -5 \\ 5 \\ -10 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{150}$$

Aufgabe 7 Man berechne die Hessische Normalform, Schnittgrade und Schnittwinkel der beiden Ebenen, gegeben jeweils durch 3 Punkte:

$$E_1: \ P_1 : \vec{p}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \ P_2 : \vec{p}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \ P_3 : \vec{p}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$E_2: \ P_4 : \vec{p}_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}, \ P_5 : \vec{p}_5 = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \ P_6 : \vec{p}_6 = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Parameterdarstellung der beiden Ebenen:

$$E_1 : \vec{x} = \vec{p}_1 + s(\vec{p}_2 - \vec{p}_1) + t(\vec{p}_3 - \vec{p}_1) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad \text{mit } s,\ t \in \mathbb{R}$$

$$E_2 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + v \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad \text{mit } u,\ v \in \mathbb{R}$$

Normalvektoren:

$$\widetilde{\vec{n}_1} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{n}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\widetilde{\vec{n}_2} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{n}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Hessische Normalform:

$<\vec{x}, \vec{n}>= d \;\Rightarrow\; d = \{\vec{x}_0, \vec{n}\},\; |d| =$ Abstand von E zu $\vec{0}$ d.h.

$$d_1 =< \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} >= \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$d_2 =< \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} >= \frac{7}{\sqrt{2}}$$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad \text{d.h.}$$

$$E_1 : \frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{z}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$E_2 : \frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{y}{\sqrt{2}} = \frac{7}{\sqrt{2}}$$

Schnittgerade: löse lineares Gleichungssystem

$$\left.\begin{array}{r} x + z = 1 \\ x + y = 7 \end{array}\right| \begin{array}{l} (-1) \\ \swarrow \end{array} \quad \Rightarrow y - z = 6$$

setze $z = t \Rightarrow y = z + 6 = 6 + t$ und $x = 1 - z = 1 - t$, d.h.

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 1-t \\ 6+t \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad t \in \mathbb{R}$$

Schnittwinkel:

$$<\vec{n}_1,\ \vec{n}_2>= \underbrace{|\vec{n}_1| * |\vec{n}_2|}_{=1} * \cos\alpha = \cos\alpha$$

$$\Rightarrow \cos\alpha =< \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} >= \frac{1}{2} * 1 = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{3}$$

Definition:

Die Vektoren $\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}\ \in \mathbb{R}^3$ bilden eine Basis des $\mathbb{R}^3$
$\Longleftrightarrow$ $\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}$ sind linear unabhängig
$\Longleftrightarrow$ Gleichungssystem $c_1\vec{a} + c_2\vec{b} + c_3\vec{c} = \vec{0}$ hat nur die triviale Lösung
$\Longleftrightarrow$ $\det(\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}) \neq 0$
$\Longleftrightarrow$ jeder Vektor $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$ hat **eindeutige** Darstellung

$$\vec{x} = c_1\vec{a} + c_2\vec{b} + c_3\vec{c}$$

bezüglich der Basis $B = \{\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}\}$

$$\Phi_B(\vec{x}) := \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} \text{ heißt Koordinatendarstellung von } \vec{x} \text{ bezüglich der Basis } B.$$

Aufgabe 8 Man untersuche, für welche $\lambda \in \mathbb{R}$ die Vektoren

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} \lambda \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix},\ \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ \lambda \end{pmatrix},\ \vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ \lambda \end{pmatrix}$$

eine Basis des $\mathbb{R}^3$ bilden, und berrechne gegebenenfalls die Koordinatendarstellung von $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ bezüglich $B = \{\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}\}$

löse dazu **simultan**:

$$c_1\vec{a} + c_2\vec{b} + c_3\vec{c} = \vec{0} \;\Big|\; \vec{x} \qquad \text{d.h.}$$

$$\begin{array}{cccc|c|cl}
 & \lambda & 2 & 1 & 0 & 1 & \mid + \lambda * [\text{2.Spalte}] \\
\rightarrow & -1 & 2 & 2 & 0 & 0 & \\
 & 2 & \lambda & \lambda & 0 & 0 & \mid + 2 * [\text{2.Spalte}] \\
\hline
 & & 2+\lambda 2 & 2\lambda+1 & 0 & 1 & \mid -\frac{2\lambda+1}{\lambda+4} * [\text{2.Spalte] mit } \lambda \neq -4 \\
\rightarrow & & \lambda+4 & \lambda+4 & 0 & 0 & \\
\hline
 & & & -1 & 0 & 1 &
\end{array}$$

$\Rightarrow$ homogenes Gleichungssystem besitzt nicht-triviale Lösung für $\lambda = -4$
d.h. $B = \{\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}\}$ bildet für $\lambda \neq -4$ eine Basis des $\mathbb{R}^3$
(Berechnung von $\det(\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c})$ *höherer Rechenaufwand)*

Für $\lambda \neq -4$ gilt:
$\Rightarrow -c_3 = 1$, d.h. $c_3 = -1$
$\Rightarrow c_2 + c_3 = 0$, d.h. $c_2 = -c_3 = 1$

$\Rightarrow -c_1 + 2c_2 + 2c_3 = 0$, d.h. $c_1 = 2(c_2 + c_3) = 0$

$$\Rightarrow \Phi_B(\vec{x}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ für } \lambda \neq -4$$

Definition:

$\mathrm{rg}A :=$ Rang der Matrix A
$:=$ Anzahl der linear unabhängigen Zeilen (oder Spalten) von A

Aufgabe 9 Bestimme für $n \geq 2$ den Rang der (n+1, n)-Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1+\frac{1}{n} & 1+\frac{2}{n} & \cdots & 1+\frac{n-1}{n} \\ 3 & 3+\frac{1}{n} & 3+\frac{2}{n} & \cdots & 3+\frac{n-1}{n} \\ 5 & 5+\frac{1}{n} & 5+\frac{2}{n} & \cdots & 5+\frac{n-1}{n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 2n+1 & 2n+1+\frac{1}{n} & 2n+1+\frac{2}{n} & \cdots & 2n+1+\frac{n-1}{n} \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1+\frac{1}{n} & 1+\frac{2}{n} & \cdots & 1+\frac{n-1}{n} \\ 2 & 2 & 2 & & 2 \\ \vdots & & & & \\ 2 & 2 & 2 & & 2 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1+\frac{1}{n} & 1+\frac{2}{n} & \cdots & 1+\frac{n-1}{n} \\ 2 & 2 & 2 & & 2 \\ & & & & \\ & \mathbf{0} & & & \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \mathrm{rg}A = 2 \qquad$ für $n \geq 2$

Vorlesung 2 - 06.09.2001

Definition:

1. V, W seinen Vektorräume über K ($\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$). Dann heißt Abbildung $F : V \to W$ linear, falls
$$F(\lambda_1 \vec{u} + \lambda_2 \vec{v}) = \lambda_1 F(\vec{u}) + \lambda_2 F(\vec{v})$$
für $\lambda_1,\ \lambda_2 \in K$ und $\vec{u}, \vec{v} \in V$.
2. Kern $F = \left\{ \vec{u} \in V \mid F(\vec{u}) = \vec{0} \right\}$
3. Bild $F = \{\vec{w} \in W \mid \vec{w} = F(\vec{u}), \vec{u} \in V\}$

Dimensionssätze:

V, W seien endlich-dimensionale Vektorräume über K

1. U_1, U_2 seinen Vektorräume von V. Dann gilt
$$\dim(U_1 + U_2) = \dim U_1 + \dim U_2 - \dim(U_1 \cap U_2)$$
2. $F : V \to W$ sei linear. Dann gilt:
$$\dim V = \dim(\text{Kern } F) + (\dim(\text{Bild } F)$$

Aufgabe 10 Man bestimme zu der linearen Abbildung $F : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ mit

$$F(\vec{x}) = \begin{pmatrix} -1 & 5 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ -7 & 13 & 5 & 4 \end{pmatrix} \vec{x} \quad \text{für } \vec{x} \in \mathbb{R}^4$$

die Mengen Kern F und Bild F mit Basisangabe

Es gilt:

Kern $F : F(\vec{x}) = A\vec{x}$, d.h. löse $A\vec{x} = \vec{0}$

Gaußverfahren

$$\begin{array}{rrrrr|ll}
\to & -1 & 5 & 1 & 2 & 0 & \\
 & 2 & 1 & -1 & 1 & 0 & | + 2 * [\text{1.Spalte}] \\
 & -7 & 13 & 5 & 4 & 0 & | - 7 * [\text{1.Spalte}] \\
\hline
\to & & 11 & 1 & 5 & 0 & \\
 & & -22 & -2 & -10 & 0 & | + 2 * [\text{1.Spalte}] \\
\hline
\to & & & & 0 & 0 &
\end{array}$$

$\Rightarrow$ *[Rang]* $\text{rg} A = 2$

d.h. $A\vec{x} = \vec{0}$ hat $n - \text{rg}A = 4 - 2 =$ **2 linear unabhängige Lösungen**

Wähle $x_2 = s,\ x_4 = t \quad \Longrightarrow \quad x_3 = -11x_2 - 5x_4 = -11s - 5t$ und

$$\begin{aligned} x_1 &= 5x_2 + x_3 + 2x_4 \\ &= 5s + (-11s - 5t) + 2t \\ &= -6s - 3t \end{aligned}$$

$$\vec{x} = s \begin{pmatrix} -6 \\ 1 \\ -11 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{mit} s, t \in \mathbb{R}$$

ist Gesammtheit aller Lösungen von $A\vec{x} = \vec{0}$

$$\Rightarrow \text{Kern } F = \ell\Big(\underbrace{\begin{pmatrix} -6 \\ 1 \\ -11 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\text{Basis von KernF}} \Big) \qquad \text{wobei } \ell \text{ die Linearkombination meint}$$

Wegen

$$\begin{aligned} \dim(\text{Bild } F) &= \dim \mathbb{R}^4 - \dim(\text{Kern } F) \\ &= 4 - 2 = 2 \end{aligned}$$

folgt:

$$\text{Bild } F = \ell\Big(\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 13 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \Big)$$

[da $\dim($*Bild* $F) = 2$*, kann man sich 2 aussuchen, z.B.]*

$$= \ell\Big(\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 13 \end{pmatrix} \Big)$$

oder:

Bild F: A durch Spaltenoperationen auf Halbdiagonalenform bringen

$$\begin{matrix} -1 & 5 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ -7 & 13 & 5 & 4 \end{matrix} \quad \rightarrow \quad \begin{matrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 11 & 1 & 5 \\ -7 & -22 & -2 & -10 \end{matrix} \quad \rightarrow \quad \begin{matrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ -7 & -2 & 0 & 0 \end{matrix}$$

$$\Rightarrow \text{Bild } F = \ell\Big(\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \Big)$$

Aufgabe 11 Man bestimme die Werte von $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, für die das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 + x_3 &= \mu \\ 3x_1 - 3x_2 + \lambda x_3 &= 4 \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 &= 1 \end{aligned}$$

eindeutig lösbar, mehrdeutig lösbar bzw. nicht lösbar ist. Im Falle der mehrdeutigen Lösbarkeit gebe man die Lösungsgesammtheit in Vektorform an.

Gauß-Verfahren

Gleichungssystem durch elementare Zeilenoperationen auf Halbdiagonalensystem bringen.

$$\begin{array}{rrrr|rl} & 2 & -1 & 1 & \mu & \mid +2 * [\text{3.Spalte}] \\ & 3 & -3 & \lambda & 4 & \mid +3 * [\text{3.Spalte}] \\ \rightarrow & -1 & 2 & -1 & 1 & \\ \hline \rightarrow & & 3 & -1 & \mu + 2 & \\ & & 3 & \lambda - 3 & 7 & \mid -1 * [\text{1.Spalte}] \\ \hline \rightarrow & & & \lambda - 2 & 5 - \mu & \end{array}$$

Fallunterscheidung:

1. Fall: Für $\lambda \neq 2$ ist das System eindeutig lösbar

2. Fall: Für $\lambda = 2,\ \mu = 5$ ist das System mehrdeutig lösbar

3. Fall: Für $\lambda = 2,\ \mu \neq 5$ ist das System nicht lösbar

mehrdeutige Lösung ($\lambda = 2,\ \mu = 5$):

$$\begin{array}{rrr|r} -1 & 2 & -1 & 1 \\ & 3 & -1 & 7 \\ & & 0 & 0 \end{array}$$

$\Rightarrow$ Wähle $x_2 = t$
$\Rightarrow x_3 = 3x_2 - 7 = 3t - 7$
und $x_1 = 2x_2 - x_3 - 1 = 2t - 3t + 7 - 1 = -t + 6$
$\Rightarrow$ Lösungsgesammtheit in Vektorform:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} -t+6 \\ t \\ 3t-7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ -7 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad t \in \mathbb{R}$$
$$= \vec{x}_{sp} + \vec{x}_h(t)$$

$\vec{x}_{sp}$ ist spezielle Lösung von $A\vec{x} = \vec{b}$ und $\vec{x}_h(t)$ ist die allgemeine Lösung von $A\vec{x} = \vec{0}$

Aufgabe 12 Man untersuche, für welche $y_1,\ y_2,\ y_3 \in \mathbb{R}$ das System

$$\begin{aligned} -x_1 + x_2 + 3x_3 &= y_1 \\ 2x_1 + 2x_2 + 4x_3 - x_4 &= y_2 \\ -7x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 &= y_3 \end{aligned}$$

lösbar ist, bestimme den Rang der Koeffizientenmatrix und berechne im Fall der Lösbarkeit die Lösungsgesammtheit.

Ferner gebe man eine Basis der allgemeinen Lösung des homogenen Gleichungssystems an.

Es gilt (Gauß-Verfahren)

$$\begin{array}{crrrr|rl} \rightarrow & -1 & 1 & 3 & 0 & y_1 & \\ & 2 & 2 & 4 & -1 & y_2 & |+2*[\text{1.Spalte}] \\ & -7 & -1 & 1 & 2 & y_3 & |-7*[\text{1.Spalte}] \\ \hline \rightarrow & & 4 & 10 & -1 & 2y_1 + y_2 & \\ & & -8 & -20 & 2 & y_3 - 7y_1 & |+2*[\text{1.Spalte}] \\ \hline \rightarrow & & & & 0 & y_3 - 3y_1 + 2y_2 & \end{array}$$

$\Rightarrow \text{rg}A = 2$ und System $A\vec{x} = \vec{b}$ ist lösbar $\Longleftrightarrow \text{rg}A = \text{rg}(A, \vec{b})$
$\Rightarrow$ Gleichungssystem lösbar $\Longleftrightarrow y_3 - 3y_1 + 2y_2 = 0$
Sei $y_3 = 3y_1 - 2y_2 \Rightarrow n - \text{rg}A = 4 - 2 =$ **2 frei wählbare Parameter**
Wähle z.B. $x_2 = t,\ x_3 = s$
$\Rightarrow x_4 = 4x_2 + 10x_3 - 2y_1 - y_2 = 4t + 10s - 2y_1 - y_2$
$\quad x_1 = x_2 + 3x_2 - y_1 = t + 3s - y_1$
$\Rightarrow$ Lösungsgesammtheit in Vektorform

$$\vec{x} = \underbrace{\begin{pmatrix} -y_1 \\ 0 \\ 0 \\ -2y_1 - y_2 \end{pmatrix}}_{\vec{x}_{sp}} + \underbrace{s \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \\ 10 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}}_{\vec{x}_h(t,s) \quad \text{allg.Lsg.v. } A\vec{x} = \vec{0}} \qquad \text{mit } s, t \in \mathbb{R}$$

d.h. $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \\ 10 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$ bilden Basis von $\vec{x}_h(t, s)$

inverse Matrix

A sei (n,n)-Matrix: A^{-1} existiert $\Longleftrightarrow \det A \neq 0$

Aufgabe 13 Man untersuche, für welche $\lambda \in \mathbb{R}$ die zu der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ \lambda & 1 & \lambda \end{pmatrix}$$

inverse Matrix A^{-1} existiert, und berechne diese ggf.

Gauß-Verfahren

Bringe Ansatz $A|E$ durch elementare Zeilenoperationen auf die Form $E|A^{-1}$

$$\begin{array}{cccc|ccc|l}
\rightarrow & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & \\
 & 0 & 2 & -2 & 0 & 1 & 0 & \\
 & \lambda & 1 & \lambda & 0 & 0 & 1 & | -\lambda * [1.\text{Spalte}] \\
\hline
 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & \\
 & 0 & 2 & -2 & 0 & 1 & 0 & \\
 & 0 & 1-\lambda & \lambda & -\lambda & 0 & 1 & |\frac{\lambda-1}{2} * [2.\text{Spalte}] \\
\hline
 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & \\
 & 0 & 2 & -2 & 0 & 1 & 0 & | +2 * [3.\text{Spalte}] \\
 & 0 & 0 & 1 & -\lambda & \frac{\lambda-1}{2} & 1 & \\
\hline
 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & | -\frac{1}{2} * [2.\text{Spalte}] \\
 & 0 & 2 & 0 & -2\lambda & \lambda & 2 & \\
 & 0 & 0 & 1 & -\lambda & \frac{\lambda-1}{2} & 1 & \\
\hline
 & 1 & 0 & 0 & 1+\lambda & -\frac{\lambda}{2} & -1 & \\
 & 0 & 2 & 0 & -2\lambda & \lambda & 2 & | * \frac{1}{2} \\
 & 0 & 0 & 1 & -\lambda & \frac{\lambda-1}{2} & 1 & \\
\hline
 & 1 & 0 & 0 & 1+\lambda & -\frac{\lambda}{2} & -1 & \\
 & 0 & 1 & 0 & -\lambda & \frac{\lambda}{2} & 1 & \\
 & 0 & 0 & 1 & -\lambda & \frac{\lambda-1}{2} & 1 &
\end{array}$$

$\Rightarrow A^{-1}$ existiert für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ mit

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1+\lambda & -\frac{\lambda}{2} & -1 \\ -\lambda & \frac{\lambda}{2} & 1 \\ -\lambda & \frac{\lambda-1}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

alternativ: Berechnung über Co-Faktoren *[nur für 3×3-Matrizen geeignet]*

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\Big((-1)^{i+j} \det A^{i,j}\Big)^T$$

Es gilt:

$$\det A = \begin{array}{c} \rightarrow \\ \\ \\ \end{array} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ \lambda & 1 & \lambda \end{vmatrix} = 2\lambda + 2 - (2\lambda) = 2 \neq 0 \qquad \text{für } \lambda \in \mathbb{R}$$

$\Rightarrow A^{-1}$ existiert für alle $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\Big(\det A^{i,j}\Big) = \begin{pmatrix} 2\lambda+2 & 2\lambda & -2\lambda \\ \lambda & 1 & 1-\lambda \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \left((-1)^{i+j}\det A^{i,j}\right)^T = \begin{pmatrix} 2\lambda+2 & -\lambda & -2 \\ -2\lambda & \lambda & 2 \\ -2\lambda & \lambda-1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2\lambda+2 & -\lambda & -2 \\ -2\lambda & \lambda & 2 \\ -2\lambda & \lambda-1 & 2 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 14 Berechne den Wert der n-reihigen Determinante

$$D_n = \begin{vmatrix} 1+a^2 & a & & \mathbf{0} \\ a & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & a \\ \mathbf{0} & & a & 1+a^2 \end{vmatrix} \leftarrow \qquad \text{d.h. Tridiagonaldeterminante}$$

Es gilt:

$$D_n = (1+a^2) * D_{n-1} - a * \begin{vmatrix} & & & & 0 \\ & & \widetilde{D}_{n-2} & & \vdots \\ & & & & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & a & a \end{vmatrix}$$

$$= (1-a^2)D_{n-1} - a^2 D_{n-2} \qquad \text{Rekursionsformel}$$

Ferner gilt:

$D_1 = 1 + a^2$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 1+a^2 & a \\ a & 1+a^2 \end{vmatrix} = (1+a^2)^2 - a^2$$
$$= 1 + a^2 + a^4$$

$$D_3 = \begin{array}{c} \rightarrow \\ \\ \\ \end{array}\begin{vmatrix} 1+a^2 & a & 0 \\ a & 1+a^2 & a \\ 0 & a & 1+a^2 \end{vmatrix}$$
$$= (1+a^2)D_2 - a^2(1+a^2)$$
$$= (1+a^2)(1+a^2+a^4-a^2)$$
$$= (1+a^2)(1+a^4)$$
$$= 1 + a^2 + a^4 + a^6$$

Behauptung:

$$D_n = \sum_{k=0}^{n} a^{2k} \qquad \text{für } n \in \mathbb{N}$$

Beweis:

$\mathcal{M} \subset \mathbb{N}$ sei die Menge, für die die Behauptung gilt

$\Rightarrow 1, 2, (3) \in \mathcal{M}$

Sei $n, n-1 \in \mathcal{M}$. Dann gilt:

nach Rekursionsformel:

$$D_{n+1} = (1+a^2)D_n - a^2 D_{n-1}$$

nach Annahme:

$$= (1+a^2)\sum_{k=0}^{n} a^{2k} - a^2 \sum_{k=0}^{n-1} a^{2k}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} a^{2k} + a^2 \sum_{k=0}^{n} a^{2k} - a^2 \sum_{k=0}^{n-1} a^{2k}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} a^{2k} + a^2 * a^{2n} = \sum_{k=0}^{n} a^{2k} + a^{2(n+1)}$$

$$= \sum_{k=0}^{n+1} a^{2k} \Rightarrow n+1 \in \mathcal{M} \Rightarrow \text{Behauptung}$$

Aufgabe 15 Berrechne den Wert der n-reihigen Determinante

$$D_n = \begin{vmatrix} a_n & & 0 & b_n \\ & \ddots & & \vdots \\ 0 & & a_2 & b_2 \\ c_n & \cdots & c_2 & a_1 \end{vmatrix} \qquad \begin{array}{l} *(-\frac{c_n}{a_n}) \text{ zu n-ter Spalte addieren} \\ \qquad\qquad \ddots \\ \qquad\qquad\quad *\,(-\frac{c_2}{a_2}) \text{ zu n-ter Spalte addieren} \end{array}$$

Für $a_i \neq 0, \quad 2 \leq i \leq n, \quad$ gilt:

$$D_n = \begin{vmatrix} a_n & & 0 & b_n \\ & \ddots & & \vdots \\ 0 & & a_2 & b_2 \\ 0 & \cdots & 0 & x \end{vmatrix} \qquad \text{mit } x = a_1 - \sum_{i=2}^{n} \frac{b_i c_i}{a_i}$$

$$= \prod_{k=2}^{n} a_k * x = \prod_{k=2}^{n} a_k * \left(a_1 - \sum_{i=2}^{n} \frac{b_i c_i}{a_i} \right)$$

$$= \prod_{k=1}^{n} a_k - \sum_{i=1}^{n} b_i c_i * \frac{\prod_{k=2}^{n} \frac{b_i c_i}{a_i}}{a_i}$$

$$= \prod_{k=1}^{n} a_k - \sum_{i=1}^{n} b_i c_i * \prod_{\substack{k=2 \\ k \neq i}}^{n} a_k$$

Stetigkeit $\Rightarrow$ auch gültig für $a_k = 0$ mit $k \in \{2 \ldots n\}$

Definition:

A sei n×n-Matrix

1. Dann heißt $\vec{x} \neq \vec{0}$ **Eigenvektor** zum Eigenwert x_0, falls $A\vec{x} = \lambda_0\vec{x}$ gilt.
2. Eigenraum $E(A, \lambda_0) := \left\{\vec{x} \in \mathbb{R}^n \mid (A - \lambda_0 E)\vec{x} = \vec{0}\right\}$
3. $P_A(\lambda) := \det(A - \lambda E)$ heißt charakteristisches Polynom von A

Satz

1. Es gilt $P_A(\lambda) = (-1)^n \prod_{i=1}^{m} (\lambda - \lambda_i)^{\mu_i}$, wobei λ_i Eigenwert der algebraischen Vielfachheit, μ_i ist für $i = 1 \dots m$
2. Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten sind linear unabhängig

Satz

1. A sei reell-symetrische n×n-Matrix.
   Dann sind alle EW von A reell und es existiert ein ONS $\{\vec{x} \dots \vec{x}_n\}$ von Eigenvektoren von A *[ONS - Ortogonalsystem?]*
2. A sei reelle n×n-Matrix.
   Ist $\lambda_i \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ EW von A der algebraischen Vielfachheit μ_i und $\vec{x}_1$ Eigenvektor von A zum EW λ_i, dann ist $\overline{\lambda}_i$ ebenfalls EW von A der allgebraischen Vielfachheit μ_i und $\overline{\vec{x}_i}$ Eigenvektor von A zum EW $\overline{\lambda_i}$

Vorlesung 3 - 07.09.2001

Aufgabe 16 Man berechne alle EW einschließlich ihrer algebraischen Vielfachheiten und alle zugehörigen Eigenräume der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Eigenwerte:

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda E) &= \begin{array}{r} \\ \\ \rightarrow \end{array}\begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (2-\lambda)((3-\lambda)(1-\lambda)+1) \\ &= (2-\lambda)(\lambda^2 - 4\lambda + 4) \\ &= (2-\lambda)(\lambda-2)^2 \\ &= -(\lambda-2)^3 \end{aligned}$$

$\Rightarrow \lambda_1 = 2,\ \mu_1 = 3$

Eigenraum:

$(A - \lambda_1 E)\vec{x} = \vec{0}$ zu lösen

$$\begin{array}{rrrr|l} 1 & -1 & 0 & 0 & \leftarrow \\ 1 & -1 & 1 & 0 & | -1 * [1.\text{Spalte}] \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \\ \hline & & 0 & 0 & \end{array}$$

$\Rightarrow \operatorname{rg} A = 1$, d.h. $n - \operatorname{rg} A = 3 - 1 = 2$ linear unabhängige Lösungen

Wähle z.B. $x_2 = s,\ x_3 = t$

$\Rightarrow x_1 = x_2 - x_3 = s - t$, d.h.

$$\vec{x} = s\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \text{mit}(s,t) \neq (0,0)$$

ist Gesammtheit aller Eigenvektoren zu $\lambda_1 = 2 \Rightarrow E(A,2) = \ell\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$

Aufgabe 17 Man berechne für $n \in \mathbb{N}$ alle EW einschließlich ihrer algebraischen Vielfachheiten und alle zugehörigen Eigenräume der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} n & 2 & 0 & 0 \\ 0 & n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2n & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 2n \end{pmatrix}$$

Eigenwerte:

$$\det(A-\lambda E) = \left|\begin{array}{cc|cc} n-\lambda & 2 & 0 & 0 \\ 0 & n-\lambda & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 2n-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 2n-\lambda \end{array}\right| \qquad \text{Blockstruktur}$$

$$= (n-\lambda)^2 * ((2n-\lambda)^2 + 1)$$

$\Rightarrow \lambda_1 = n,\ \mu_1 = 2$ und $\lambda_{2,3} = 2n \pm i, \mu_{2,3} = 1$

Eigenräume:

$$(A - \lambda_i E)\vec{x} = \vec{0}$$

$\lambda_1 = n$:

$$\begin{array}{cccc|cl} 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & \Rightarrow x_2 = 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & n & 1 & 0 & | + n * [\text{4.Spalte}] \Rightarrow (n^2+1)x_4 = 0 \text{ d.h. } x_4 = 0 \Rightarrow x_3 = 0 \\ 0 & 0 & -1 & n & 0 & \end{array}$$

Nullspalte $\Rightarrow x_1$ beliebig, d.h.

$$\vec{x} = t\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, t \neq 0 \qquad \text{Gesammtheit aller Eigenvektoren zu } \lambda_1 = n$$

$$\Rightarrow E(A,n) = \ell\Big(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\Big)$$

$\boldsymbol{\lambda_2 = 2n + i}$:

$$\begin{aligned} (-n-i)x_1 + 2x_2 &= 0 \\ (-n-i)x_2 &= 0 \quad \Rightarrow x_2 = x_1 = 0 \\ -ix_3 + x_4 &= 0 \quad \text{Wähle z.B.} x_4 = i \\ -x_3 - ix_4 &= 0 \quad \Rightarrow x_3 = 1 \end{aligned}$$

d.h.

$$\vec{x}_2 = s\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ i \end{pmatrix},\ s \neq 0,\ \text{Gesammtheit aller Eigenvektoren zu } \lambda_2 = 2n + 1$$

$\lambda_3 = 2n - 1$: A reell, $\lambda_3 = \overline{\lambda_2}$

$$\Rightarrow \vec{x}_3 = \overline{\vec{x}_2} = r\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -i \end{pmatrix},\ r \neq 0 \text{ Eigenvektoren zu } \lambda_3$$

$$E(A, 2n+1) = \ell\Big(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ i \end{pmatrix}\Big) und$$

$$E(A, 2n-i) = \ell\Big(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -i \end{pmatrix}\Big)$$

Jordansche Normalform

A sei n×n-Matrix, $P_A(\lambda) = (-1)^n \prod_{i=1}^{m} (\lambda - \lambda_i)^{\mu_i}$

Definition:

1. Kern $(A - \lambda_i E)^{\mu_i}$ heißt **verallgemeinerter Eigenraum von** A zum EW $\lambda_i (i = 1 \dots m)$
2. $\dim \text{Kern } (A - \lambda_i E) = \dim E(A, \lambda_i)$ heißt **geometrische Vielfachheit** der EW λ_i

Satz λ_0 sei EW von A der algebraischen Vielfachheit μ. Mit $K_j :=$ Kern $(A - \lambda_i E)^j$ gilt:

$$K_1 \subset K_2 \subset \dots \subset K_\mu = \text{Kern } (A - \lambda_0)^\mu$$

und

$$\dim K_\mu = \mu$$

Fall 1: Alle Inklusionen sind echt. Dann gilt
$\dim K_j = j$ für $j = 1 \dots \mu$
Dann existiert **eine** Kette von Hauptvektoren zu EW λ_0:
Es existiert $\vec{v}_\mu \in K_\mu \setminus K_{\mu-1}$ und es ist

$$\vec{v}_j := (A - \lambda_0 E)\vec{v}_{j+1} für j = \mu - 1, \mu - 2, \dots, 1$$

Fall 2: Es existiert ein $r < \mu$ mit

$$K_1 \subset K_2 \subset \dots \subset K_r = K_{r+1} = \dots = K_\mu$$

mit $\dim K_1 < \dim K_2 < \dots < \dim K_r$
Dann existieren s linear unabhängige Vektoren

$$\vec{v}_1^{(1)}, \dots, \vec{v}_s^{(r)} \in K_r \setminus K_{r-1}$$

Jeder dieser Vektoren $\vec{v}_i^{(r)}$ liefert eine Kette von Hauptvektoren mit

$$\vec{v}_i^{(j)} = (A - \lambda_0 E)\vec{v}_i^{(j+1)} \text{ für } j = r-1, r-2, \dots, 1$$

Dabei ist $r * s \leq \mu$. Für $r * s < \mu$ existiert ein Index $j < r$, wobei in K_j es weitere Hauptvektoren gibt, linear unabhängig zu den vorherigen Ketten. Diese erzeugen neue Ketten (geringerer Länge) von Hauptvektoren, u.s.w.

Zu jeder solchen Kette von Hauptvektoren der Länge j gehört ein j×j-Jordanblock von der Form

$$\begin{pmatrix} \lambda_0 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda_0 \end{pmatrix}$$

Satz Zu jeder n×n-Matrix A existiert eine invertierbare Matrix S aus Hauptvektoren, so daß

$$S^{-1}AS = J \qquad\qquad \text{Jordan-Matrix ist}$$

J setzt sich aus Jordanblöcken zusammen.

$$J = \begin{pmatrix} J_1 & & & 0 \\ & J_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & J_\lambda \end{pmatrix}$$

jeder Jordanblock hat die Form

$$\begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda_i \end{pmatrix}$$

bzw. (λ_i), falls die zugehörige Kette von Hauptvektoren nur aus einem Eigenvektor besteht

Ketten:

$$\vec{v}_i^{(1)}, \vec{v}_i^{(2)}, \ldots, \vec{v}_i^{(kj)} j = 1 \ldots \lambda$$

$$S = (\vec{v}_1^{(1)}, \ldots, \vec{v}_1^{(k_1)}, \vec{v}_2^{(1)}, \ldots, \vec{v}_2^{(k_2)}, \ldots)$$

Jordan'sche Normalform

A: Anzahl der Jordanblöcke
= Anzahl der Ketten von Hauptvektoren
= Anzahl der linear unabhängigen Eigenvektoren von A
= Summe der geometrischen Vielfachheiten der EW von A

Aufgabe 18 Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Man berechne zu A

1. alle EW mit ihren algebraischen Vielfachheiten und zugehörigen Eigenräumen
2. eine invertierbare Matrix S aus Hauptvektoren (verallgemeinerte Eigenvektoren) und eine Jordan-Matrix J, so daß $S^{-1}AS = J$ ist.

Lösung:

1. siehe **Aufgabe 16**, d.h. $\lambda_1 = 2$, $\mu_1 = 3$ und $E(A, 2) = \ell\Big(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\Big)$

2. $\dim E(A,2) = 2 < 3 = \mu_1 \Rightarrow$ 1 Hauptvektor zu berechnen, d.h. 2 Ketten von Hauptvektoren: EV, HV und EV

Es gilt $(A-2E)^2 = 0$, da $\lambda_1 = 2$ einziger Eigenwert d.h. Kern $(A-2E)^2 = \mathbb{R}^3$

$\Rightarrow$ Wähle Hauptvektor

$\vec{v}_1^{(2)} = \mathbb{R}^3 \setminus$ Kern $(A-2E)$

z.B. $\vec{v}_1^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \setminus$ Kern $(A-2E)$

$\Rightarrow \vec{v}_1^{(1)} = (A-\lambda_1 E)\vec{v}_1^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in E(A,2)$ linear unabhängig zu $\vec{v}_1^{(1)}$

$$\Rightarrow S = (\vec{v}_1^{(1)}, \vec{v}_1^{(2)}, \vec{v}_2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

ist invertierbar mit

$$S^{-1}AS = J = \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 2 \end{array}\right)$$

Aufgabe 19 Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Man berechne zu A

1. alle EW mit ihren algebraische Vielfachheiten und zugehörigen Eigenräumen
2. eine invertierbare Matrix S aus Hauptvektoren und eine Jordanmatrix J, so daß $S^{-1}AS = J$ ist.

Lösung:

1. **Eigenwerte:**

$$\det(A-\lambda E) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & -1 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{vmatrix}$$
$$= (1-\lambda)(\lambda^2 - 2\lambda + 1) = -(\lambda-1)^3$$

d.h. $\lambda_1 = 1,\ \mu_1 = 3$

Eigenraum: $(A-E)\vec{x} = \vec{0}$, d.h.

$$\begin{array}{ccc|cl} 0 & 1 & 0 & 0 & \Rightarrow x_2 = 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & \Rightarrow x_3 = 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & \Rightarrow x_1 \text{ beliebig, d.h.} \end{array}$$

$\vec{x} = t\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $t \neq 0$ Gesammtheit der Eigenvektoren

$$E(A,1) = \ell\Big(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\Big) = \text{Kern } (A-E)$$

2. **Hauptvektoren:** $\dim \text{Kern } (A-E) = 1$, d.h. 1 Kette von Hauptvektoren der Länge 3

$$(A-E)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \text{Kern } (A-E)^2 = \ell\Big(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\Big)$$

Es gilt $(A-E)^3 = 0$, da $\dim \text{Kern } (A-E)^3 = 3 = \dim \mathbb{R}^3$
Wähle z.B. $\vec{v}_1^{(3)} \in \text{Kern } (A-E)^3 \setminus \text{Kern } (A-E)^2$
d.h. z.B. $\vec{v}_1^{(3)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \vec{v}_1^{(2)} = (A-E)\vec{v}_1^{(3)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{v}_1^{(1)} = (A-E)\vec{v}_1^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow S = (\vec{v}_1^{(1)}, \vec{v}_1^{(2)}, \vec{v}_1^{(3)}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

invertierbar mit

$$S^{-1}AS = J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Schmidtsches Orthonormalisierungsverfahren

$\{\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n\}$ sei System von linear unabhängigen Vektoren des $\mathbb{R}^m$. $\Rightarrow n \leq m$
Aus $\{\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n\}$ entsteht ein ONS $\{\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n\}$ d.h.

$$<\vec{x}_i, \vec{x}_j> = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & f\ddot{u}r \quad i = j \\ 0 & \phantom{f\ddot{u}r} \quad i \neq j \end{cases}$$

durch

$$\vec{x}_1 := \frac{1}{|\vec{a}_1|}\vec{a}_1$$

$$\vec{x}_k := \frac{1}{|\vec{x}_k^*|}\vec{x}_k^*$$

mit

$$\vec{x}_k^* = \vec{a}_k - \sum_{i=1}^{k-1} <\vec{a}_k, \vec{x}_i> \vec{x}_i \qquad \text{für } \; 2 \le k \le n$$

Aufgabe 20 Orthonormalisiere nach dem schmidtschen Verfahren

$$\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \vec{a}_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \vec{a}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

.

Lösung:

$$\Rightarrow det(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3) = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \leftarrow \ = (-1) \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -4 \neq 0$$

d.h. System orthonormalisierbar (da linear unabhängig)

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \vec{x}_1 = \quad & \tfrac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\
\Rightarrow \vec{x}_2^* = \quad & \vec{a}_2 - <\vec{a}_2, \vec{x}_1> \vec{x}_1 \\
= \quad & \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - < \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \tfrac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} > \tfrac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\
= \quad & \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \tfrac{-3+1}{(\sqrt{2})^2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \\
\Rightarrow \vec{x}_2 = \quad & \tfrac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\
\Rightarrow \vec{x}_3^* = \quad & \vec{a}_3 - <\vec{a}_3, \vec{x}_1> \vec{x}_1 - <\vec{a}_3, \vec{x}_2> \vec{x}_2 \\
= \quad & \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - < \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \tfrac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} > \tfrac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\
& \quad - < \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \tfrac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} > \tfrac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\
= \quad & \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \tfrac{1}{2}(2+0+0) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \tfrac{1}{2}(-2+0+0) \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\
= \quad & \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\
\Rightarrow \vec{x}_3 = \quad & \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$\Rightarrow \{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3\}$ bilden eine ONB des $\mathbb{R}^3$.

Berechnung der Matrix $A^n, n \in \mathbb{N}$ für reell-symmetrische $k \times k$-Matrizen A

Es gilt wegen $A = A^T$, A reell:
Zu A existiert eine ONB aus Eigenvektoren

$$A\vec{x}_i = \lambda_i \vec{x}_i \qquad i = 1, \ldots, k$$

wobei die Eigenwerte der Vielfachheit nach gezählt werden (Eigenwerte alle reell!).
Ferner: $S = (\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_k)$ ist orthogonal (orthonormal), d.h. $S^{-1} = S^T$, mit

$$S^T A S = D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_k \end{pmatrix} \qquad \text{Diagonalform}$$

$$\Rightarrow A = SDS^T \quad \Rightarrow A^n = SD^nS^T$$

$$\text{mit} \quad D^n = \begin{pmatrix} \lambda_1^n & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_k^n \end{pmatrix} \quad \text{für} \quad n \in \mathbb{N}$$

Vorlesung 4 - 10.09.2001

$A = SDS^T$ und $A^n = SD^nS^T$ mit

$$D^n = \begin{pmatrix} \lambda_1^n & & 0 \\ & \lambda_2^n & \\ 0 & & \lambda_k^n \end{pmatrix} \qquad n \in \mathbb{N}$$

Aufgabe 21 Man berechne $A^n,\ n \in \mathbb{N}$ für die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 8 & -4 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow A = A^T$ reell

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda E) &= \begin{vmatrix} 8-\lambda & -4 \\ -4 & 2-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (8-\lambda)(2-\lambda) - (-4)^2 \\ &= \lambda^2 - 10\lambda \overset{!}{=} 0 \end{aligned}$$

$\Rightarrow \lambda_1 = 10,\ \lambda_2 = 0$ mit $\mu_{1,2} = 1$

ONB von Eigenvektoren:

$\boldsymbol{\lambda_1 = 10}$:

$(A - \lambda_1 E)\vec{x} = \vec{0},$ d.h.

$$\begin{aligned} -2x_1 - 4x_2 &= 0 \\ -4x_1 - 8x_2 &= 0 \end{aligned}$$

Wähle z.B. $x_2 = -1$

$\Rightarrow x_1 = 2$

$\Rightarrow \vec{x}_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

$\boldsymbol{\lambda_2 = 0}$:

$A = A^T \Rightarrow \vec{x}_2 \perp \vec{x}_1,$ d.h. $\vec{x}_2 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow S = (\vec{x}_1,\ \vec{x}_2) = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

ist orthogonal und

$$D = \begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow A^n = SD^nS^T &= \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10^n & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 * 10^n & -10^n \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 4 * 10^n & -2 * 10^n \\ -2 * 10^n & 10^n \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{5} 10^n \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \\
&= 10^{n-1} \begin{pmatrix} 8 & -4 \\ -4 & 2 \end{pmatrix} = 10^{n-1} A
\end{aligned}$$

Aufgabe 22 Man transformiere den Kegelschnitt $x^2 - 2xy + y^2 - 10x - 6y + 25 = 0$ auf Hauptachsen und skizziere seine Lage in der (x,y)-Ebene. Man berechne den Mittelpunkt (beziehungsweise Scheitelpunkt bei Parabel).

Es gilt:

$$x^2 - 2xy + y^2 - 10x - 6y + 25 \quad = \quad < A\vec{x},\ \vec{x} > + < \vec{b},\ \vec{x} > + c$$

mit der Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} -10 \\ -6 \end{pmatrix}$ und $c = 25$

Eigenwerte von A:

$$\begin{aligned}
\det(A - \lambda E) &= \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 \\ -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} \\
&= (1-\lambda)^2 - 1 \\
&= \lambda^2 - 2\lambda
\end{aligned}$$

$\Rightarrow \lambda_1 = 2,\ \lambda_2 = 0$

ONB von Eigenvektoren:

$\boldsymbol{\lambda_1 = 2}$:

$$-x_1 - x_2 = 0$$
$$-x_1 - x_2 = 0$$

$\Rightarrow \vec{x}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$\boldsymbol{\lambda_2 = 0}$:

$A = A^T$ reell $\Rightarrow \vec{x}_2 \perp \vec{x}_1$, d.h. $\vec{x}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\det(\vec{x}_1 \ldots \vec{x}_n) = +1$$

$$\det(\vec{x}_1, \vec{x}_2) = \frac{1}{(\sqrt{2})^2} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}(1+1) = 1$$

$\Rightarrow \vec{x}_1,\ \vec{x}_2$ bilden ein Rechtssystem

Hauptachsentransformation:

$\vec{x} = S\vec{y}$ mit $S = (\vec{x}_1,\ \vec{x}_2) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},\ \vec{y} = \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow x = \frac{1}{\sqrt{2}}(\xi + \eta)$, $y = \frac{1}{\sqrt{2}}(-\xi + \eta)$

Einsetzen liefert:

$$\lambda_1 \xi^2 + \lambda_2 \eta^2 + <\vec{b},\ \vec{x}(\xi,\ \eta)> + c = 0$$

d.h.

$$2\xi^2 + 0\eta^2 - 10\frac{1}{\sqrt{2}}(\xi + \eta) - 6\frac{1}{\sqrt{2}}(-\xi + \eta) + 25 = 0$$

$$\Longrightarrow 2\xi^2 - \frac{4}{\sqrt{2}}\xi - \frac{16}{\sqrt{2}}\eta + 25 = 0$$

Quadratische Ergänzung

$$2\left(\xi^2 - \frac{2}{\sqrt{2}}\xi + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2\right) - \frac{16}{\sqrt{2}}\eta + 25 - 1 = 0$$

$$\Longrightarrow 2\left(\xi - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{16}{\sqrt{2}}\eta - 24$$

d.h.

$$\left(\xi - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{8}{\sqrt{2}}\left(\eta - \frac{\sqrt{2}}{8}12\right)$$

$$= \frac{8}{\sqrt{2}}\left(\eta - \frac{3}{2}\sqrt{2}\right) \qquad \to \text{Parabel}$$

Normalform:

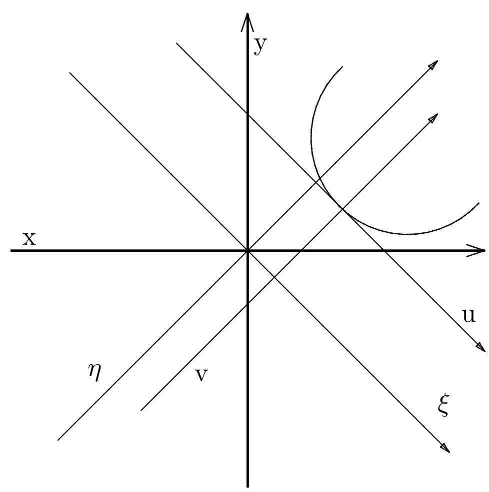
$$\xi - \frac{1}{\sqrt{2}} = u$$

$$\eta - \frac{3}{2}\sqrt{2} = v$$

$$\Longrightarrow u^2 = \frac{8}{\sqrt{2}} v$$

Scheitelpunkt der Parabel:

$$\vec{m} = \xi_0 \vec{x}_1 + \eta_0 \vec{x}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \vec{x}_1 + \frac{3}{2}\sqrt{2} \vec{x}_2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \frac{3}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$



Aufgabe 23 Man transformiere den Kegelschnitt $2x^2 + 12xy - 7y^2 - 20x - 10y = 0$ auf Hauptachsen und skizziere seine Lage in der (x,y)-Ebene. Man berechne den Mittelpunkt (beziehungsweise Scheitelpunkt bei Parabel).

$$\Rightarrow A = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 6 & -7 \end{pmatrix}, \ \vec{b} = \begin{pmatrix} -20 \\ -10 \end{pmatrix}, \ c = 0$$

$$\Rightarrow \det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 6 \\ 6 & -7-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (2-\lambda)(-7-\lambda) - 36$$

$$= \lambda^2 + 5\lambda - 50 \overset{!}{=} 0$$

$$[= (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) = (\lambda - 5)(\lambda + 10)]$$

$$\lambda_{1,2} = -\frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4} + 50} = -\frac{5}{2} \pm \frac{15}{2}$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = 5, \ \lambda_2 = -10$$

ONB von Eigenvektoren:

$\lambda_1 = \mathbf{5}$:

$$-3x_1 + 6x_2 = 0$$
$$6x_1 - 12x_2 = 0$$

d.h.

$$\vec{x}_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\lambda_2 = \mathbf{-10}$:

$$A = A^T,\ reell \Rightarrow \vec{x}_2 \perp \vec{x}_1,\ d.h. \vec{x}_2 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Hauptachsentransformation:

$$\vec{x} = S\vec{y} \qquad \text{mit} \qquad S = (\vec{x}_1,\ \vec{x}_2) = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $\vec{y} = \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}$ und $x = \frac{1}{\sqrt{5}}(2\xi - \eta)$ $y = \frac{1}{\sqrt{5}}(\xi + 2\eta)$
Einsetzen liefert

$$5\xi^2 - 10\eta^2 - 20\frac{1}{\sqrt{5}}(2\xi - \eta) - 10\frac{1}{\sqrt{5}}(\xi + 2\eta) = 0$$

d.h.

$$5\xi^2 - 10\eta^2 - \frac{50}{\sqrt{5}}\xi = 0$$

Quadratische Ergänzung:

$$5(\xi^2 - \frac{10}{\sqrt{5}}\xi + (\sqrt{5})^2) - 10\eta^2 = 25$$

d.h.

$$(\xi + \sqrt{5})^2 - 2\eta^2 = 5$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{(\xi - \sqrt{5})^2}{5} - \frac{\eta^2}{5/2} = 1 \qquad \rightarrow \text{Hyperbel}$$

Normalform:

$$\xi - \sqrt{5} = u$$

$$\eta = v$$

d.h.

$$\xi_0 = \sqrt{5},\ \eta_0 = 0$$

$$\Longrightarrow \frac{u^2}{5} - \frac{v^2}{5/2} = 1$$

Mittelpunkt:

$$\vec{m} = \underbrace{\xi_0}_{=\sqrt{5}} \vec{x}_1 + \underbrace{\eta_0}_{=0} \vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Schnitt mit Koordinatenachsen im (u,v)-System:

$$v = 0 \quad \Longrightarrow \quad u_{1,2} = \pm\sqrt{5}$$

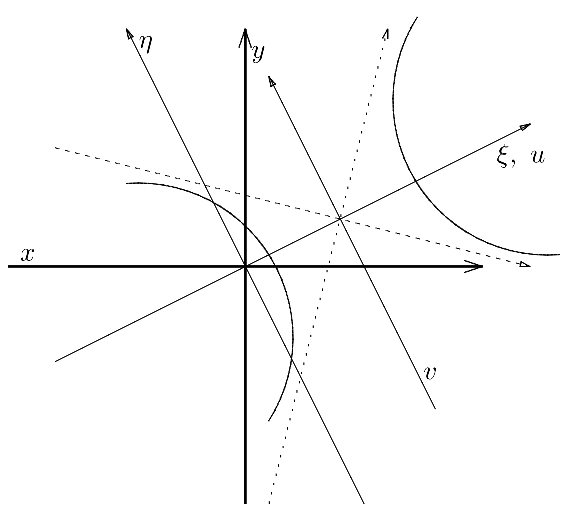
d.h. u-Achse ist Mittelachse der Hyperbel

Asymptoten:

$$\frac{u^2}{5} - \frac{v^2}{5/2} = 0$$

d.h.

$$v^2 = u^2 \quad \Longrightarrow \quad v = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}u$$



Aufgabe 24 Sei $a_1 > 0$ und $a_{n+1} = \dfrac{2a_n^{5/4}}{\sqrt{a_n}+2}$, $n \in \mathbb{N}$. Zeige: $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist Nullfolge

Es gilt:

Ist $|a_{n+1}| \le q * |a_n|$ für alle $n \ge n_0$ mit $0 < q < 1$ (q unabhängig von n)

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$

Definition der $a_n \Rightarrow a_1 > 0 \Rightarrow a_{n+1} > 0$ für $n \in \mathbb{N}$

$$\Rightarrow |a_{n+1}| = \frac{2a_n^{5/4}}{\sqrt{a_n}+2} = a_n \frac{2 * \sqrt[4]{a_n}}{\sqrt{a_n}+2}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} a_n \underbrace{\frac{2 * \sqrt[4]{a_n}\sqrt{2}}{\sqrt{a_n}+2}}_{=\frac{2*\sqrt[4]{a_n}*\sqrt{2}}{(\sqrt[4]{a_n})^2+(\sqrt{2})^2}} \qquad \text{wegen } a^2+b^2 \ge 2ab$$

$$\le \frac{1}{\sqrt{2}} a_n \qquad \text{für } n \in \mathbb{N}$$

d.h.

$$q = \frac{1}{\sqrt{2}} < 1$$

$$\Longrightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

Aufgabe 25 Untersuche, ob die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$a_n = \sqrt[3]{n^3+3n^2} - \sqrt[3]{n^3+2n^2} \qquad \text{für } n \in \mathbb{N}$$

einen Grenzwert hat, und bestimme diesen gegebenenfalls.

Es gilt:

$$x^k - y^k = (x-y)\sum_{j=0}^{k-1} x^{k-1-j}y^j$$

$$= (x-y)(x^{k-1} + x^{k-2}y + x^{k-3}y^2 + \ldots + y^{k-1})$$

d.h. für $k = 3$:

$$x^3 - y^3 = (x-y)(x^2+xy+y^2)$$

$$a_n = \sqrt[3]{n^3+3n^2} - \sqrt[3]{n^3+2n^2}$$

$$= \left(\sqrt[3]{n^3+3n^2} - \sqrt[3]{n^3+2n^2}\right) \underbrace{\frac{\left(\sqrt[3]{n^3+3n^2}\right)^2 + \sqrt[3]{n^3+3n^2}\sqrt[3]{n^3+2n^2} + \left(\sqrt[3]{n^3+2n^2}\right)^2}{\ldots}}_{mit\ 1\ erweitert}$$

Wurzeltrick

$$= \frac{(\sqrt[3]{n^3+3n^2})^3 - (\sqrt[3]{n^3+2n^2})^3}{Nenner}$$

$$= \frac{n^2}{(\sqrt[3]{n^3+3n^2})^2 + \sqrt[3]{n^3+3n^2}\sqrt[3]{n^3+2n^2} + (\sqrt[3]{n^3+2n^2})^2}$$

$$= \frac{1}{\left(\sqrt[3]{1+\frac{3}{n}}\right)^2 + \sqrt[3]{1+\frac{3}{n}}\sqrt[3]{1+\frac{2}{n}} + \left(\sqrt[3]{1+\frac{2}{n}}\right)^2}$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{1}{1+1+1} = \frac{1}{3} \qquad \text{für } n \to \infty$$

d.h.

$$\lim a_n = \frac{1}{3}$$

Satz

Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sei monoton wachsend (fallend) und nach oben (unten) beschränkt.
$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n = x$ existiert.

Banach'sches Kontraktionskriterium:

Für die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gelte:

$$|a_{n+2} - a_{n+1}| \le q * |a_{n+1} - a_n| \qquad \text{für } n \ge n_0 \text{ mit } 0 < q < 1,\ q \text{ unabhängig}$$

Dann existiert $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$

Aufgabe 26 Untersuche, ob $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_1 = \frac{1}{4},\ a_{n+1} = \frac{1}{4} + a_n^2$ für $n \in \mathbb{N}$ einen Grenzwert hat, und berechne diesen gegebenenfalls.

Angenommen, $\lim a_n = x$ existiere
$\Rightarrow x = \dfrac{1}{4} + x^2$, d.h. $x^2 - x + \frac{1}{4} = 0$
$\Rightarrow x_{1,2} = \dfrac{1}{2} \pm \sqrt{\dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{4}} = \dfrac{1}{2}$
$\Rightarrow$ Der einzige mögliche Grenzwert ist $x = \frac{1}{2}$.

$$a_1 = \frac{1}{4} \implies a_2 = \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{16} > a_1$$

$$a_3 = \frac{1}{4} + {a_2}^2 = \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{16}\right)^2$$

$$= \underbrace{\frac{1}{4} + \frac{1}{16}}_{=a_2} + \underbrace{2\frac{1}{64} + \frac{1}{16^2}}_{>0} > a_2$$

$\Rightarrow$ Vermutung: Die Folge ist monoton wachsend.

Behauptung:

$$a_n < \frac{1}{2} \qquad \text{für } n \in \mathbb{N}$$

Beweis:

$$a_1 = \frac{1}{4} < \frac{1}{2}$$

$\mathcal{M} \subset \mathbb{N}$ sei die Menge, für die die Behauptung gilt. $\Rightarrow 1 \in \mathcal{M}$ sei $n \in \mathcal{M}$. Dann gilt:

$$a_{n+1} = \frac{1}{4} + a_n^2 < \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

$\Rightarrow n + 1 \in \mathcal{M} \Rightarrow$ Behauptung

Behauptung:

$$a_{n+1} > a_n \qquad \text{für } n \in \mathbb{N}$$

Beweis:

$$a_{n+1} - a_n = \frac{1}{4} + {a_n}^2 - a_n = \left(a_n - \frac{1}{2}\right)^2 > 0 \qquad \text{da} \quad a_n < \frac{1}{2},\ n \in \mathbb{N}$$

$\Rightarrow (a_n)$ ist monoten wachsend und nach oben beschränkt
$\Rightarrow \lim a_n = x$ existiert! $(= \frac{1}{2})$

Aufgabe 27 Zeige, daß die Folge (a_n) mit $a_1 \geq 0,\ a_{n+1} = \dfrac{1}{1+a_n}$ für $n \in \mathbb{N}$ einen Grenzwert hat, und bestimme diesen

Angenommen, $\lim a_n = x$ existiere

$\Rightarrow x = \dfrac{1}{1+x}$, d.h. $x(1+x) = 1$

$$x^2 + x - 1 = 0$$

$\Rightarrow x_{1,2} = -\dfrac{1}{2} \pm \sqrt{\dfrac{1}{4} + 1} = -\dfrac{1}{2} \pm \dfrac{\sqrt{5}}{2}$

$a_1 \geq 0$, Definition der $a_n \Rightarrow a_{n+1} > 0$ für $n \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow x \geq 0$, d.h. nur $x = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}$ möglich!

$$\begin{aligned}
|a_{n+2} - a_{n+1}| &= \left| \frac{1}{1+a_{n+1}} - \frac{1}{1+a_n} \right| \\
&= \left| \frac{1 + a_n - (1 + a_{n+1})}{(1+a_{n+1})(1+a_n)} \right| \\
&= \left| \frac{a_n - a_{n+1}}{(1+a_{n+1})(1+a_n)} \right| \\
&= \frac{1}{(1+a_{n+1})(1+a_n)}\ |a_{n+1} - a_n| \\
&= \frac{1}{(1+\frac{1}{1+a_n})(1+a_n)}\ |a_{n+1} - a_n| \\
&= \frac{1}{\underbrace{(1 + a_n + 1)}_{2+a_n \geq 2 \text{ da } a_n \geq 0 \text{ für } n \in \mathbb{N}}}\ |a_{n+1} - a_n| \\
&\leq \underbrace{\frac{1}{2}}_{=q<1}\ |a_{n+1} - a_n| \qquad \text{für } n \in \mathbb{N}
\end{aligned}$$

nach Banach'schem Kontraktionskriterium:

$\Rightarrow \lim a_n$ existiert

$\Rightarrow \lim a_n = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{5}}{2}$

Vorlesung 5 - 11.09.2001

Definition: Reihen

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n := \lim_{N \longrightarrow \infty} \sum_{n=1}^{N} a_n$$

d.h. Reihe konvergiert, falls die Folge ihrer Partialsummen konvergent ist.

Notwendiges Kriterium:

$\lim_{n \longrightarrow \infty} a_n = 0$ ist notwendig für die Konvergenz von $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

Majorantenkriterium

Gilt

$$|a_n| \leq b_n$$

für alle $n \geq n_0$ und

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

sei konvergent.

$\Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ und $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sind konvergent.

Minorantenkriterium

Gilt $a_n \geq b_n > 0$ für $n \geq n_0$ und $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ divergent.

$\Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergent.

Vergleichsreihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} \begin{cases} \text{konvergent für} & \alpha > 1 \\ \text{divergent für} & \alpha \leq 1 \end{cases}$$

Quotientenkriterium

- Gilt $\overline{\lim} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = q < 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ist absolut konvergent.
- Reihe divergiert, falls $\underline{\lim} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = q > 1$.

Wurzelkriterium

- Gilt $\overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|} = q < 1 \Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ist absolut konvergent.
- Reihe divergiert, falls $\overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|} = q > 1$.

Leibniz-Kriterium

Sei $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ mit $a_n > 0$ für $n \in \mathbb{N}$, also Reihe alternierend, mit $\lim_{n \longrightarrow \infty} a_n = 0$ und $a_{n+1} \leq a_n$ für $n \geq n_0$ (monoton fallend).

$\Longrightarrow$ Reihe ist konvergent

Fehlerabschätzung

$$|S - S_N| = \left| \sum_{n=N+1}^{\infty} (-1)^n a_n \right| \leq a_{N+1} \qquad \text{für } N \geq n_0$$

Integralkriterium

Sei $f : [1, \infty) \longrightarrow (0, \infty)$ stetig und monoton fallend, d.h. $f(x) > 0$ für $x \geq 1$ und $f(x) \downarrow$ für $x \longrightarrow \infty$. Dann gilt:

$$\int_2^{\infty} f(x)\ \delta \mathrm{x} \leq \sum_{n=1}^{\infty} f(n) \leq \int_1^{\infty} f(x)\ \delta \mathrm{x}$$

$\Longrightarrow$ Reihe und Integral sind entweder beide konvergent oder divergent.

Potenzreihen

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \qquad z,\ z_0 \in \mathbb{C}$$

Konvergenzradius

$$r = \frac{1}{\overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|}}$$

Ist der Konvergenzradius der Potenzreihe, d.h. Potenzreihe konvergiert für $|z - z_0| < r$ und divergiert für $|z - z_0| > r$. Keine Aussage für $|z - z_0| = r$.
Konvergenz ist gleichmäßig für $|z - z_0| \leq \rho < r$. Potenzreihe darf in $|z - z_0| < r$ gliedweise differenziert und integriert werden.

Aufgabe 28 Konvergiert $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n+1) - \ln n}{\sqrt{n}}$?

Es gilt:

$$0 < a_n = \frac{\ln(n+1) - \ln n}{\sqrt{n}} = \frac{\ln \frac{n+1}{n}}{\sqrt{n}}$$

$$= \frac{\ln(1 + \frac{1}{n})}{\sqrt{n}}$$

$$\leq \frac{\frac{1}{n}}{\sqrt{n}} = \frac{1}{n^{3/2}}$$

da $\ln(1+x) \leq x$ für $x > -1$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}}$ ist konvergent $\quad \left(\alpha = \frac{3}{2} > 1\right)$

Majorantenkriterium $\Rightarrow$ Reihe konvergiert

Aufgabe 29 Konvergiert $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{3n} n!}{3^n n^n}$?

Quotientenkriterium:

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{2^{3(n+1)}(n+1)!}{3^{(n+1)}(n+1)^{n+1}} * \frac{3^n n^n}{2^{3n} n!}$$

$$= \frac{8}{3}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \frac{8}{3} * \frac{1}{(1+\frac{1}{n})^n}$$

$$\longrightarrow \underbrace{\frac{8}{3e}}_{< \frac{8}{3*2,7} = \frac{8}{8,1} < 1}, \text{ da } \lim_{n \longrightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$$

$\Rightarrow$ Reihe konvergiert

Aufgabe 30 Konvergiert $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\left(\frac{n+1}{n\sqrt[n]{3}}\right)^{(n^2)} n\right)$?

Wurzelkriterium:

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \sqrt[n]{n}\left(\frac{n+1}{n\sqrt[n]{3}}\right)^n$$

$$= \sqrt[n]{n}\frac{1}{3}(1 + \frac{1}{n})^n$$

$$\longrightarrow 1 * \frac{1}{3} * e = \frac{e}{3} < 1 \qquad\qquad \text{da} \lim_{n \longrightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$$

$\Rightarrow$ Reihe ist konvergent

Aufgabe 31 Bestimme Konvergenzintervall der Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} (x+1)^n$$

Potenzreihe mit Konvergenzradius

$$r = \frac{1}{\overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|}}$$

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \frac{1}{\sqrt[n]{\sqrt{n}}} = \frac{1}{\sqrt{\sqrt[n]{n}}}$$

$$\longrightarrow \frac{1}{\sqrt{1}} = 1 \qquad\qquad \text{da } \sqrt[n]{n} \longrightarrow 1 \text{ für } n \longrightarrow \infty,\ \sqrt{x} \text{ stetig}$$

$\Rightarrow r = 1$, d.h. Potenzreihe konvergiert für $|x+1| < 1$ und divergiert für $|x+1| > 1$

Entwicklungspunkt $x_0 = -1$

$\Rightarrow$ konvergent für $-2 < x < 0$

$\mathbf{x = -2}$:

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$: alternierend mit $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}} > 0$, $\lim_{n \longrightarrow \infty} a_n = 0$ und

Monotonie $\frac{1}{\sqrt{n+1}} < \frac{1}{\sqrt{n}}$ für $n \in \mathbb{N}$, da $\sqrt{x}$ streng monoton wachsend.

Leibniz-Kriterium $\Rightarrow$ Potenzreihe konvergent für $x = -2$

$\mathbf{x = 0}$:

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$: divergiert, da $\sum \frac{1}{n^{\alpha}}$ für $\alpha = \frac{1}{2} < 1$ divergent ist.

$\Rightarrow$ Konvergenzintervall $= [-2,\ 0)$

Aufgabe 32 Für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ konvergiert $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\arctan n}{n(\ln n)^{\alpha}}$?

Es gilt:

wegen

$$\frac{\arctan 2}{n(\ln n)^{\alpha}} \leq \frac{\arctan n}{n(\ln n)^{\alpha}} < \frac{\frac{\pi}{2}}{n(\ln n)^{\alpha}} \qquad \text{für } n \geq 2$$

konvergiert die Reihe $\Longleftrightarrow \displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^{\alpha}}$ konvergiert.

Betrachte daher: $f(x) = \dfrac{1}{x(\ln x)^{\alpha}} \qquad x \geq 2$

$\Rightarrow f(x) > 0$ stetig für $x \geq 2$ und Monotonie:

$$f'(x) = \frac{-1}{x^2(\ln x)^{2\alpha}} \left\{ (\ln x)^{\alpha} + x * \alpha(\ln x)^{\alpha-1} * \frac{1}{x} \right\}$$

$$= \frac{-1}{x^2(\ln x)^{2\alpha}} \left\{ (\ln x)^{\alpha} + \alpha(\ln x)^{\alpha-1} \right\}$$

$$= \underbrace{\frac{-1}{x^2(\ln x)^{\alpha}}}_{<0} \left\{ \underbrace{1 + \frac{\alpha}{\ln x}}_{>0} \right\} \qquad \text{für } x \geq x_0 \text{ da } \lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{\alpha}{\ln x} = 0$$

$$< 0 \qquad \text{für } x \geq x_0$$

$\Rightarrow f(x)$ streng monoton fallend für $x \geq x_0$

$$\int_2^A \frac{1}{x(\ln x)^{\alpha}}\ \delta\mathrm{x} = \int_2^A \Big(f(x)\Big)^{-\alpha} * f'(x)\ \delta\mathrm{x} \qquad \text{für } f(x) = \ln x$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{1-\alpha}(\ln x)^{1-\alpha}\Big|_2^A & \text{für } \alpha \neq 1 \\ \ln(\ln x)\Big|_2^A & \text{für } \alpha = 1 \end{cases}$$

konvergiert für $\alpha > 1$ und divergiert für $\alpha \leq 1$

Integralkriterium $\Rightarrow$ Reihe konvergiert für $\alpha > 1$ und divergiert für $\alpha \leq 1$

Aufgabe 33 Welche Funktion wird durch $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+2} x^n$ dargestellt?

Benutze $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$ für $|x| < 1$

und $\frac{1}{(1-x)^2} = \frac{d}{dx} * \frac{1}{1-x} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d}{dx} x^n = \sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1}$ für $|x| < 1$

u.s.w.

Es ist

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+2} x^n = \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{2}{n+2}\right) x^n$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} x^n - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n+2} x^n \qquad \text{für } |x| < 1$$

$$= \frac{1}{1-x} - 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n+2} x^n$$

$$= \frac{1}{1-n} - 1 - \frac{2}{x^2} \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+2} x^{n+2}}_{g(x)}$$

$$\Longrightarrow g'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x^{n+1} \qquad \text{für } |x| < 1$$

$n + 1 = k$

$$\sum_{k=2}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x} - 1 - x$$

$$\Longrightarrow g(x) = -\ln(1-x) - x - \frac{x^2}{2} + c$$

Wegen $g(0) = 0$ folgt $c = 0 = g(0)$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{1}{1-x} - 1 + \underbrace{\frac{2}{x^2}\left(\ln(1-x) + x + \frac{x^2}{2}\right)}_{\substack{\Rightarrow 0 \text{ für } x \longrightarrow 0 \\ \text{(l'Hospital oder Reihenentwicklung)}}} \qquad \text{für } |x| < 1,\ x \neq 0$$

Funktionsreihen, gleichmäßige Konvergenz

Definition:

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \qquad x \in I$$

heißt gleichmäßig konvergent auf I, falls es zu jedem $\epsilon > 0$ einen Index $N(\epsilon)$ gibt mit

$$\left| S(x) - S_N(x) \right| = \left| \sum_{n=N+1}^{\infty} f_n(x) \right| < \epsilon$$

für alle $x \in I,\ N \geq N(\epsilon)$

Aufgabe 34 Konvergiert $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n \sin\frac{1}{nx}$ gleichmäßig auf $[1,\ \infty)$?

Zunächst punktweise Konvergenz mit Leibniz-Kriterium:

$$a_n(x) = \sin\frac{1}{nx} > 0 \qquad\qquad \text{für } x \geq 1,\ n \in \mathbb{N}$$

Da $0 < \frac{1}{nx} \leq 1$ gilt dort $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty} a_n(x) = \sin 0 = 0$.

Und wegen $0 < \frac{1}{(n+1)x} < \frac{1}{nx} \leq 1$ folgt für $n \in \mathbb{N}$:

$$\sin\frac{1}{(n+1)x} < \sin\frac{1}{nx}$$

da $\sin t$ streng monoton wachsend auf $[0,\ \frac{\pi}{2}]$

d.h. $\Big(a_n(x)\Big)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton fallend bei festem $x \in [1,\ \infty)$

$\Rightarrow$ Reihe konvergiert auf $[1,\ \infty)$

Fehlerabschätzung da Leibniz-Kriterium

$$\Longrightarrow \Big|S(x) - S_N(x)\Big| = \left|\sum_{n=N+1}^{\infty}(-1)^n \sin\frac{1}{nx}\right|$$

$$\leq a_{N+1}(x) = \sin\frac{1}{(N+1)x}$$

$$\leq \frac{1}{(N+1)x} \qquad\qquad \text{da } \sin t \leq t \text{ auf } [0,\ \frac{\pi}{2}]$$

$$\leq \frac{1}{N+1} \qquad\qquad \text{für } x \geq 1$$

$$\leq \epsilon \qquad\qquad \text{für alle } N \geq N(\epsilon) = \frac{1}{\epsilon} - 1$$

$\Rightarrow$ Konvergenz ist gleichmäßig auf $[1,\ \infty)$

Aufgabe 35 Untersuche $f(x) = \dfrac{x^4 + 3x^3}{x^3 + 2x^2 - 4x - 8}$ auf Nullstellen, Polstellen sowie Asymptote und skizziere sie. Man berechne gegebenenfalls die Schnittpunkte des Graphen von f mit seiner Asymptote.

Es gilt: $x^4 + 3x^3 = x^3(x+3)$

und $(x^3 + 2x^2 - 4x - 8) : (x-2) = x^2 + 4x + 4 = (x+2)^2$

$$\begin{array}{l} \underline{-(x^3 - 2x^2)} \\ \qquad 4x^2 - 4x - 8 \\ \qquad \underline{-(4x^2 - 8x)} \\ \qquad\qquad 4x - 8 \end{array}$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{x^3(x+3)}{(x-2)(x+2)^2}$$

Nullstellen :

$$\left.\begin{array}{ll} x_1 = 0 & \text{3. Ordnung} \\ x_2 = -3 & \text{1. Ordnung} \end{array}\right\} \text{Vorzeichenwechsel}$$

Polstellen :

$$\left.\begin{array}{ll} x_3 = 2 & \text{1. Ordnung} \\ x_4 = -2 & \text{2. Ordnung} \end{array}\right\} \text{d.h.} \left\{\begin{array}{l} \text{Vorzeichenwechsel} \\ \text{kein Vorzeichenwechsel} \end{array}\right.$$

Asymptote :

$$\begin{array}{l} (x^4 + 3x^3) : (x^3 + 2x^2 - 4x - 8) = x + 1 + \underbrace{\dfrac{2x^2 + 12x + 8}{(x-2)(x+2)^2}}_{\longrightarrow 0 \text{ für } x \longrightarrow \pm\infty} \\ -\underline{(x^4 + 2x^3 - 4x^2 - 8x)} \\ \qquad x^3 + 4x^2 + 8x \\ \qquad -\underline{(x^3 + 2x^2 - 4x - 8)} \\ \qquad\qquad 2x^2 + 12x + 8 \end{array}$$

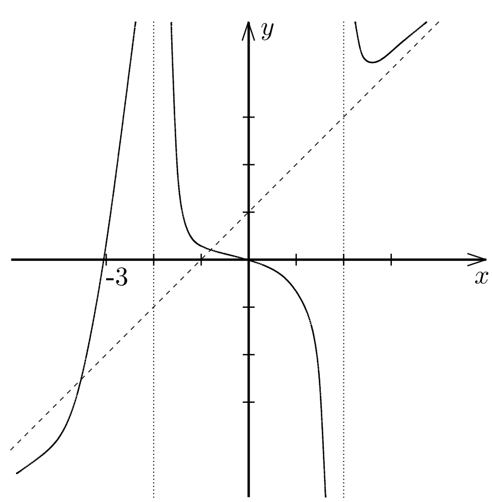
$\Rightarrow g(x) = x + 1$ ist Asymptote für $x \longrightarrow \pm\infty$

Schnittpunkte mit Asymptote :

$$2x^2 + 12x + 8 = 0 \qquad \text{d.h. } x^2 + 6x + 4 = 0$$

$$\Longrightarrow \quad x_{5,6} = -3 \pm \sqrt{9-4} = -3 \pm \sqrt{5}$$

Skizze :



Vorlesung 6 - 12.09.2001

Definition: Stetigkeit

1. $f: D \longrightarrow \mathbb{R}$ heißt auf D Lipschitz-stetig, falls eine Konstante $L > 0$ existiert mit
   $|f(x) - f(y)| \leq L|x - y| \qquad x, y \in D$
2. $f: D \longrightarrow \mathbb{R}$ heißt auf D gleichmäßig stetig, falls es zu jedem $\epsilon > 0$ ein $\delta(\epsilon) > 0$ gibt mit $|f(x) - f(y)| < \epsilon \qquad$ für alle $x, y \in D$ mit $|x - y| < \delta(\epsilon)$

Satz

1. Ist f auf D Lipschitzstetig, dann ist f auch gleichzeitig stetig auf D
2. Ist $f: [a, b] \longrightarrow D$ auf $[a, b]$ stetig, so ist f auf $[a, b]$ auch gleichmäßig stetig
3. Ist $f: I \longrightarrow \mathbb{R}$ auf I differenzierbar mit $|f'(x)| \leq M$ für $x \in I$, so ist f auf I Lipschitz-stetig mit $L = M$, und daher auch gleichmäßig stetig

Teil 3. ist Folgerung des Mittelwertsatzes der Differentialrechnung (im Randpunkt von I braucht ggf. nur Stetigkeit vorzuliegen)

Aufgabe 36 Sei $f: [1, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = \dfrac{1 - \ln x}{1 + \ln x}$ für $x \geq 1$.

Man zeige, daß f auf $[1, \infty)$ Lipschitzstetig (gleichmäßig stetig) ist.

Es gilt:

$$f'(x) = \frac{(1 + \ln x)(-\frac{1}{x}) - (1 - \ln x)\frac{1}{x}}{(1 + \ln x)^2} = \frac{-\frac{2}{x}}{(1 + \ln x)^2}$$

$$\Rightarrow |f'(x)| = \frac{2}{|x|(1 + \ln x)^2} = \frac{2}{x(1 + \ln x)^2}$$

$$\leq \frac{2}{1(1 + \ln 1)^2} = 2 \qquad f\ddot{u}r \quad x \geq 1$$

$\Rightarrow$ Behauptung

Aufgabe 37 Sei $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = \arctan \dfrac{x^2}{\sqrt{x^2 + 1}}$, $x \in \mathbb{R}$ Man zeige, daß f auf $\mathbb{R}$ Lipschitz-stetig (gleichmäßig stetig) ist.

Es gilt:

$$f'(x) = \frac{1}{1 + (\frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}})^2} \left(\frac{2x}{\sqrt{x^2 + 1}} - \frac{1}{2}x^2 * \frac{2x}{(x^2 + 1)^{3/2}} \right)$$

$$= \frac{x^2+1}{x^2+1+x^4} * \left(\frac{2x}{\sqrt{x^2+1}} - \frac{x^3}{(x^2+1)^{3/2}} \right)$$

$$= \frac{\sqrt{x^2+1}}{x^4+x^2+1} \left(2x - \frac{x^3}{x^2+1} \right)$$

$$= \frac{\sqrt{x^2+1}}{x^4+x^2+1} \frac{2x(x^2+1)-x^3}{x^2+1}$$

$$= \frac{x^3+2x}{(x^4+x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$$

$$= \frac{1+\frac{2}{x^2}}{(x+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^3})\sqrt{x^2+1}} \longrightarrow 0 \quad \text{für} \quad x \longrightarrow \pm\infty$$

und $f'(x)$ stetig auf $\mathbb{R}$, da $x^4+x^2+1 \neq 0$ auf $\mathbb{R}$ und $\sqrt{x^2+1} \neq 0$ auf $\mathbb{R}$.
$\Rightarrow |f'(x)| \leq K$ auf $\mathbb{R} \Rightarrow$ Behauptung

Satz

$f:\ [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ sei stetig auf $[a,b]$ und differenzierbar auf (a,b) mit

$$f'(x) > 0 \qquad \text{für } x \in (a,b)$$

Dann ist f auf $[a,b]$ streng monoton wachsend.

Aufgabe 38 Zeige

$$\operatorname{artanh} x > \tan x \qquad f\ddot{u}r \quad 0 < x < 1$$

Betrachte dazu

$$f(x) : \operatorname{artanh} x - \tan x \qquad\qquad 0 < x < 1$$

Ableitung von $t = \operatorname{artanh} x$: Umkehrfunktion von $x = \tanh t = \frac{\sinh t}{\cosh t}$

$$\Rightarrow \frac{dx}{dt} = \frac{\cosh t * \cosh t - \sinh t * \sinh t}{\cosh^2 t} = \frac{1}{\cosh^2 t} \qquad [\text{da } \cosh^2 t - \sinh^2 t = 1]$$

$$= 1 - \frac{\sinh^2 t}{\cosh^2 t} = 1 - \tanh^2 t$$

Satz über Ableitung der Umkehrfunktion:

$$\frac{dt}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dt}\Big|_{t=t(x)}} = \frac{1}{1 - \tanh^2 t\Big|_{t=\operatorname{arctanh}\ x}}$$

$$= \frac{1}{1-x} \qquad \text{für } |x| < 1$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{1}{1-x^2} - \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$= \frac{\cos^2 x - (1-x^2)}{(1-x^2)\cos^2 x}$$

$$= \frac{-\sin^2 x + x^2}{(1-x^2)\cos^2 x} \qquad \text{da} \quad \cos^2 x - 1 = -\sin^2 x$$

$$> 0 \quad \text{für} \quad 0 < x < 1$$

da

$$x^2 > \sin^2 x,\ x \in \mathbb{R},\ x \neq 0 \quad \text{wegen} \quad |x| > |\sin x|, x \in \mathbb{R}, x \neq 0$$

$\Rightarrow f$ ist streng monoton wachsend auf $[0,\ 1)$.

$$f(0) = \operatorname{arctanh} 0 - \tan 0 = 0 \implies f(x) > 0 \text{ auf } (0,\ 1) \Rightarrow \text{Behauptung}$$

Kritische Punkte

notwendige Bedingung: $f'(x) = 0$
hinreichende Bedingung: $f^{(k)}(x_0) = 0$
für $1 \leq k < n$ mit $n > 1$
und $f^{(n)}(x_0) \neq 0$ (erste nicht-verschwindende Ableitung)

1. n ungerade $\Rightarrow$ Sattelpunkt in x_0
2. n gerade $\Rightarrow$ lokales Extremum in x_0, und zwar
   lokales Maximum, falls $f^{(n)}(x_0) < 0$
   lokales Minimum, falls $f^{(n)}(x_0) > 0$

Aufgabe 39 Bestimme alle lokalen Maxima und Minima von $f: \ [0,\ 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \frac{\sin x}{4 - \cos^2 x} \qquad\qquad \text{für } 0 \leq x \leq 2\pi$$

Sind die Extrema auch absolute Extrema?

Es ist

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(4 - \cos^2 x)\cos x - \sin x(2\cos x \sin x)}{(4 - \cos^2 x)^2} \\ &= \frac{\cos x}{(4 - \cos^2 x)^2}(4 - \cos^2 x - 2\sin^2 x) \\ &= \frac{\cos x}{(4 - \cos^2 x)^2}(3 - \sin^2 x) \\ &\overset{!}{=} 0 \end{aligned}$$

$$\Longleftrightarrow x_1 = \frac{\pi}{2},\ x_2 = \frac{3\pi}{2} \qquad\qquad \text{da } 3 - \sin^2 x \neq 0 \text{ auf } \mathbb{R}$$

$$f''(x) = \frac{-\sin x(3 - \sin^2 x) + \cos x(-2\sin x \cos x)}{(4 - \cos^2 x)^2} + \cos x(3 - \sin^2 x)(-2)\frac{2\cos x \sin x}{(4 - \cos^2 x)^3}$$

$$\Rightarrow f''(\frac{\pi}{2}) = \frac{-2}{16} < 0$$

d.h. lokales Maximum in $x_1 = \frac{\pi}{2}$ und

$$f''(\frac{3\pi}{2}) = \frac{2}{16} > 0$$

d.h. lokales Minimum in $x_2 = \frac{3\pi}{2}$

Für absolute Extrema Funktionswerte in $x_1,\ x_2$ und in den Randpunkten 0 und 2π bestimmen:

$$f(\frac{\pi}{2}) = \frac{1}{4},\ f(\frac{3\pi}{2}) = \frac{-1}{4}$$

$f(0) = 0,\ f(2\pi) = 0$

$\Rightarrow$ Extrema sind absolute Extrema

Aufgabe 40 Bestimmt alle kritischen Punkte von $f:\ \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = x - \frac{\pi}{x^2+1} - (x^2+1)\arctan x \qquad\qquad x \in \mathbb{R}$$

und untersuche, ob ein lokales Maximum, lokales Minimum oder ein Sattelpunkt vorliegt.

$$f'(x) = 1 + \frac{\pi * 2x}{(x^2+1)^2} - 2x * \arctan x - (x^2+1)\frac{1}{1+x^2}$$

$$= 2x(\frac{\pi}{(x^2+1)^2} - \arctan x)$$

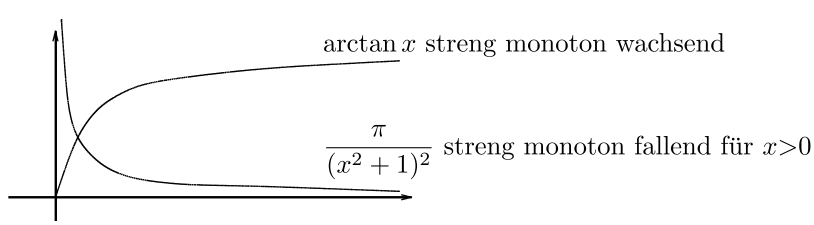
$$\overset{!}{=} 0$$

$$\Longleftrightarrow x_1 = 0 \quad \text{oder} \quad \frac{\pi}{(x^2+1)^2} - \arctan x = 0 \qquad (*)$$

d.h.

$$\underbrace{\frac{\pi}{(x^2+1)^2}}_{>0,\ x\in\mathbb{R}} = \underbrace{\arctan x}_{\leq 0 \text{ für } x \leq 0}$$

d.h. keine Lösung für $x \leq 0$



$\Rightarrow (*)$ hat genau 1 Lösung $x_2 > 0$

Wegen $\arctan 1 = \frac{\pi}{4}$ folgt $x_2 = 1$

$$\Rightarrow f''(x) = 2\left(\frac{\pi}{(x^2+1)^2} - \arctan x\right) + 2x\left(-\frac{4\pi x}{(x^2+1)^3} - \frac{1}{1+x^2}\right)$$

$\Rightarrow f''(0) = 2\pi > 0$, d.h. lokales Minimum in $x_1 = 0$

$$f''(1) = 0 + 2\left(-\frac{4\pi}{8} - \frac{1}{2}\right) < 0$$

d.h. lokales Maximum in $x_2 = 1$

Unbestimmte Ausdrücke:

Mögliche Formen: $\frac{0}{0},\ \frac{\infty}{\infty},\ 0 * \infty,\ \infty - \infty,\ 0^0,\ \infty^0,\ 1^\infty$

Aufgabe 41 Berechne

$$\lim_{x \longrightarrow \infty} x^{\arctan \frac{1}{x}}$$

Fall ∞^0:

$$\Rightarrow x^{\arctan \frac{1}{x}} = e^{\arctan \frac{1}{x} * \ln x}$$

mit

$$\arctan \frac{1}{x} * \ln x = \frac{\arctan \frac{1}{x}}{\frac{1}{\ln x}} = \frac{f(x)}{g(x)} : \text{ Form } \frac{0}{0} \text{ für } x \longrightarrow \infty$$

$$\Rightarrow \frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{\frac{1}{1+\frac{1}{x^2}} * (-\frac{1}{x^2})}{\frac{-1}{(\ln x)^2} * \frac{1}{x}} = \frac{x(\ln x)^2}{x^2+1} \longrightarrow 0 \text{ für } x \longrightarrow \infty$$

da z.B. $|\ln x| \leq k x^{\frac{1}{4}}$ für $x \geq 1$
d.h.

$$\left|\frac{f'(x)}{g'(x)}\right| \leq \frac{|x| * k^2 |x|^{\frac{1}{2}}}{x^2+1} \longrightarrow 0 \qquad \text{für } x \longrightarrow \infty$$

Regel von l'Hospital $\Rightarrow \lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$

Stetigkeit der e-Funktion $\Rightarrow \lim\limits_{x \longrightarrow \infty} x^{\arctan \frac{1}{x}} = e^0 = 1$

Aufgabe 42 Berechne $\lim\limits_{x \longrightarrow 0+} (\sin x)^{\sinh x}$

Form 0^0, d.h. Umformung

$$(\sin x)^{\sinh x} = e^{\sinh x \ln(\sin x)}$$

mit

$$\sinh x \ln(\sin x) = \frac{\ln(\sin x)}{\frac{1}{\sinh x}} = \frac{f(x)}{g(x)} : \text{ Form } \frac{\infty}{\infty} \text{ für } x \longrightarrow 0+$$

$$\Rightarrow \frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{\frac{1}{\sin x} \cos x}{\frac{-1}{\sinh^2 x} \cosh x}$$

$$= - \underbrace{\frac{\cos x}{\cosh x}}_{\longrightarrow 1 \text{ für } x \longrightarrow 0+} * \underbrace{\frac{\sinh^2 x}{\sin x}}_{= \frac{f_1(x)}{g_1(x)} \text{ Form } \frac{0}{0}}$$

$$\Rightarrow \frac{f_1{}'(x)}{g_1{}'(x)} = \frac{2 \sinh x \cosh x}{\cos x} \longrightarrow 0 \qquad \text{für } x \longrightarrow 0+$$

l'Hospital $\Rightarrow \lim\limits_{x \longrightarrow 0+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = -1 * 0 = 0$

l'Hospital $\Rightarrow \lim\limits_{x \longrightarrow 0+} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$, d.h.

Wegen der Stetigkeit der e-Funktion ist

$$\lim_{x \longrightarrow 0+} (\sin x)^{\sinh x} = e^0 = 1$$

Taylorentwicklung:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n \qquad \ln(1-x) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}, |x| < 1$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} \qquad \sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}$$

$$\cosh x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} \qquad \sinh x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

O-Schreibweise:

$$f(x) = O(g(x)) \quad \text{für} \quad x \longrightarrow x_0(\pm\infty), \quad \text{falls} \quad |f(x) \leq k * |g(x)| \quad \text{für} \quad x \longrightarrow x_0(\pm\infty)$$

z.B. $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + O(x^5)$ für $x \longrightarrow 0$

Aufgabe 43 Berechne

$$\lim_{x \longrightarrow 0} \frac{x^3 \sin x}{(1-\cos x)^2}$$

Es gilt:

$$\begin{aligned}
\frac{x^3 \sin x}{(1-\cos x)^2} &= \frac{x^3\left(x + O(x^3)\right)}{\left(1 - \left(1 - \frac{x^2}{2} + O(x^4)\right)\right)^2} \\
&= \frac{x^4 + O(x^6)}{\left(\frac{x^2}{2} + O(x^4)\right)^2} \\
&= \frac{x^4 + O(x^6)}{\frac{x^4}{4} + O(x^6)} \qquad \text{für } x \longrightarrow 0 \\
&= \frac{1 + O(x^2)}{\frac{1}{4} + O(x^2)} \\
&\longrightarrow 4 \qquad \text{für } x \longrightarrow 0
\end{aligned}$$

d.h. $\lim_{x \longrightarrow 0} \frac{x^3 \sin x}{(1-\cos x)^2} = 4$

Aufgabe 44 Berechne

$$\lim_{x\longrightarrow 0}(\frac{\sin x}{x})^{\frac{1}{1-\cos x}} \text{ : Form } 1^{\infty}$$

$$\text{da} \qquad \lim_{x\longrightarrow 0}\frac{\sin x}{x} = 1$$

$$\Rightarrow \left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{1-\cos x}} = e^{\frac{1}{1-\cos x}*\ln\frac{\sin x}{x}}$$

mit

$$\frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{x^2}{6} + O(x^4)$$

$$\Rightarrow \ln\frac{\sin x}{x} = \ln\left(1 - \frac{x^2}{6} + O(x^4)\right)$$

$$= -\left(\frac{x^2}{6} + O(x^4) + O\left(\left(\frac{x^2}{6} + O(x^4)\right)^2\right)\right)$$

$$= -\frac{x^2}{6} + O(x^4)$$

da

$$\ln(1-t) = -t + O(t^2)$$

und

$$1 - \cos x = 1 - (1 - \frac{x^2}{2} + O(x^4))$$

$$= \frac{x^2}{2} + O(x^4)$$

$$\Longrightarrow \frac{\ln\frac{\sin x}{x}}{1-\cos x} = \frac{-\frac{x^2}{6} + O(x^4)}{\frac{x^2}{2} + O(x^4)}$$

$$= \frac{-\frac{1}{6} + O(x^2)}{\frac{1}{2} + O(x^2)} \qquad \text{für } x \longrightarrow 0$$

$$\longrightarrow -\frac{1}{3} \qquad \text{für } x \longrightarrow 0$$

Wegen Stetigkeit der e-Funktion

$$\Longrightarrow \lim_{x\longrightarrow 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{1-\cos x}} = e^{-\frac{1}{3}}$$

Unbestimmte Integrale

Aufgabe 45 Berechne $\int \frac{1}{x} \arctan(1+\ln x)\ \delta\mathrm{x}$.

Wegen $\frac{d}{dx}(1+\ln x) = \frac{1}{x}$ setze

$$1+\ln x = t \qquad \text{d.h.} \qquad \frac{1}{x}dx = dt$$

$$\int \frac{1}{x} \arctan(1+\ln x)\ \delta\mathrm{x} = \int \arctan t \quad \delta\mathrm{t}$$

$$= \int 1 * \arctan t \quad \delta\mathrm{t} \qquad \textit{[partielle Integration]}$$

$$= t \arctan t - \int t \frac{1}{1+t^2}\ \delta\mathrm{t}$$

$$= t \arctan t - \frac{1}{2} \int \underbrace{\frac{2t}{1+t^2}}_{\frac{f'}{f},\ f(x)=1+t^2} \quad \delta\mathrm{t}$$

$$= t \arctan t - \frac{1}{2} \ln |f(t)| + c$$

$$= t \arctan t - \frac{1}{2} \ln(1+t^2) + c$$

$$= (1+\ln x)\arctan(1+\ln x) - \frac{1}{2} \ln\left(1+(1+\ln x)^2\right) + c \qquad c \in \mathbb{R}$$

Vorlesung 7 - 13.09.2001

Aufgabe 46

$$\int \cos^3 x \ \delta\mathrm{x} = \int (1 - \sin^2 x) \cos x \ \delta\mathrm{x}$$

$$= \sin x - \int \underbrace{\sin^2 x}_{f^2} \underbrace{\cos x}_{f'} \ \delta\mathrm{x}$$

$$= \sin x - \frac{1}{3} \sin^3 x + c \qquad\qquad c \in \mathbb{R}$$

Dabei benutzt:

$$\int \big(f(x)\big)^n f'(x) \ \delta\mathrm{x} = \begin{cases} \dfrac{1}{n+1} \big(f(x)\big)^{n+1} + c & n \neq -1 \\ \ln|f(x)| + c & n = -1 \end{cases}$$

(Substitution $t = t(0) \longrightarrow \ \delta\mathrm{t} = f'(x) \ \delta\mathrm{x} \longrightarrow \int t^n \ \delta\mathrm{t}$)

Aufgabe 47

$$\int \frac{2 - \sin x}{2 + \cos x} \ \delta\mathrm{x} = \int Rat(\sin x, \ \cos x) \ \delta\mathrm{x}$$

[mit: Rat() steht für eine rationale Funktion, in der nur das Argument vorkommt]

$$= \int \frac{2}{2 + \cos x} \ \delta\mathrm{x} + \underbrace{\int \frac{-\sin x}{2 + \cos x} \ \delta\mathrm{x}}_{\frac{f'}{f}, \ f = 2 + \cos x}$$

$$= \int \frac{2}{2 + \cos x} \ \delta\mathrm{x} + \ln|2 + \cos x|$$

Einsetzen: $t = \tan\frac{x}{2}$, $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$, $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$, $\delta\mathrm{x} = \frac{2}{1+t^2} \ \delta\mathrm{t}$

$$\Longrightarrow \int \frac{2}{2 + \cos x} \ \delta\mathrm{x} = \int \frac{2}{2 + \frac{1-t^2}{1+t^2}} * \frac{2 \ \delta\mathrm{t}}{1+t^2}$$

$$= \int \frac{4}{2 + 2t^2 + 1 - t^2} \ \delta\mathrm{t} = \int \frac{4}{t^2 + 3} \ \delta\mathrm{t} = \frac{4}{3} \int \frac{1}{\left(\frac{t}{\sqrt{3}}\right)^2 + 1} \ \delta\mathrm{t}$$

$$\text{mit} \quad u = \frac{1}{\sqrt{3}} t, \quad \delta\mathrm{t} = \sqrt{3} \ \mathrm{du} \quad \longrightarrow \quad = \frac{4}{3}\sqrt{3} \int \frac{\mathrm{du}}{u^2 + 1}$$

$$= \frac{4}{\sqrt{3}} \arctan u + c = \frac{4}{\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}} \tan\frac{x}{2}\right) + c$$

$$\Longrightarrow \frac{2 - \sin x}{2 - \cos x} \ \delta\mathrm{x} = \frac{4}{\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}} \tan\frac{x}{2}\right) + \ln|2 + \cos x| + c$$

Aufgabe 48

$$\int \frac{\delta\text{x}}{\sinh^2 x \cosh x} = \int Rat(e^x)\ \delta\text{x}$$

$[e^x = t \qquad e^x\ \delta\text{x} = \ \delta\text{t}]$

$$\int \frac{\cosh^2 x - \sinh^2 x}{\sinh^2 x \cosh x}\ \delta\text{x}$$

$$\underbrace{\int \frac{\cosh x}{\sinh^2 x}\ \delta\text{x}}_{=f^{-2}*f'} - \int \frac{2}{e^x + e^{-x}}\ \delta\text{x}$$

mit

$$\int \frac{2}{e^x + e^{-x}}\ \delta\text{x} = \int \underbrace{\frac{2e^x}{e^{2x}+1}}_{Rat(e^x)}\ \delta\text{x}$$

$$= \int \frac{2\ \delta\text{t}}{t^2+1} = 2\arctan t - c$$

$$= 2\arctan(e^x) - c$$

$$\Longrightarrow \int \frac{dx}{\sinh^2 x \cosh x} = -\frac{1}{\sinh x} - 2\arctan(e^x) + c \qquad ,c \in \mathbb{R}$$

Aufgabe 49

$$I = \int \frac{dx}{\sqrt{2x-1} - \sqrt[3]{2x-1}} = \int Rat(\sqrt[6]{2x-1})\ \delta\text{x}$$

$[t = \sqrt[6]{2x-1},\ \text{ d.h. }\ t^6 = 2x-1,\ dx = \frac{1}{2} * 6t^5\ \delta\text{t}]$

$$= \int \frac{1}{t^3 - t^2} * 3t^5\ \delta\text{t}$$

$$= \int \frac{3t^3}{t-1}\ \delta\text{t}$$

Zählergrad $\geq$ Nennergrad $\Rightarrow$ Durchdividieren

$$\frac{3t^3}{t-1} = 3\frac{t^3 - t^2 + t^2 - t + t - 1 + 1}{t-1}$$

$$= 3(t^2 + t + 1 + \frac{1}{t-1})$$

$$\Longrightarrow I = 3\int (t^2 + t + 1 + \frac{1}{t-1})\ \delta\text{t}$$

$$= t^3 + \frac{3}{2}t^2 + 3t + 3\ln|t-1| + c$$

$$= \sqrt{2x-1} + \frac{3}{2}\sqrt[3]{2x-1} + 3\sqrt[6]{2x-1} + 3\ln\left|\sqrt[6]{2x-1} - 1\right| + c$$

Aufgabe 50

$$\int \frac{2}{(x+1)^2(x^2+1)}\ \delta\mathrm{x}$$

Zählergrad < Nennergrad

$$\Rightarrow \frac{2}{(x+1)^2(x^2+1)} = \frac{a}{(x+1)^2} + \frac{b}{x+1} + \frac{cx+d}{x^2+1}$$

„Zuhaltemethode“

$$\Rightarrow a = \frac{2}{x^2+1}\Big|_{x=-1} = 1$$

und

$$(cx+d)\Big|_{x=i} = \frac{2}{(x+1)^2}\Big|_{x=i}$$

d.h.

$$ci + d = \frac{2}{(i+1)^2} = \frac{2}{i^2+2i+1} = \frac{1}{i} = -i$$

d.h. $c = -1,\ d = 0$

Setze $x = 0 \Rightarrow 2 = 1 + b + 0,$ d.h. $b = 1$

$$\Rightarrow \int \frac{2}{(x+1)^2(x^2+1)}\ \delta\mathrm{x} = \int \left(\frac{1}{(x+1)^2} + \frac{1}{x+1} - \frac{x}{x^2+1}\right)\ \delta\mathrm{x}$$

$$= -\frac{1}{x+1} + \ln|x+1| - \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + c \qquad \text{mit} \quad c \in \mathbb{R}$$

Beispiel Zuhaltemethode:

$$\frac{1}{x^3(x-1)^2(x^2+1)^2}$$

$$= \frac{1}{x^3} + \frac{a}{x^2} + \frac{b}{x} + \frac{\frac{1}{4}}{(x-1)^2} + \frac{c}{x-1} + \frac{dx+e}{(x^2+1)^2} + \frac{fx+g}{x^2+1} \qquad \Big| * (x^2+1)^2\Big|_{x=i}$$

$$\Rightarrow d, e$$

$$\Rightarrow \frac{1}{x^3(x-1)^2(x^2+1)^2} - \frac{1}{x^3} - \frac{\frac{1}{4}}{(x-1)^2} \dots$$

Uneigentliche Integrale

Majorantenkriterium

$f, g : [a, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ seien eigentlich $\mathbb{R}$-integrierbar auf $[a, c]$ für jedes $c > a$. Für $x \geq a$ gelte $|f(x)| \leq g(x)$ und $\displaystyle\int_a^\infty g(x)\ \delta\text{x}$ konvergiere.

Dann existieren $\displaystyle\int_a^\infty f(x)\ \delta\text{x}$ und $\displaystyle\int_a^\infty |f(x)|\ \delta\text{x}$

Minorantenkriterium

$f, g : [a, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ seien eigentlich $\mathbb{R}$-integrierbar auf $[a, c]$ für jedes $c > a$. Für $x \geq a$ gelte $f(x) \geq g(x) \geq 0$ und $\displaystyle\int_a^\infty g(x)\ \delta\text{x}$ divergiere.

Dann divergiert $\displaystyle\int_a^\infty f(x)\ \delta\text{x}$

(Analog für uneigentliches Integral bezüglich endlicher Grenze)

Vergleichsintegrale

1. $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha}\ \delta\text{x} \begin{cases} \text{konvergent für} & \alpha > 1 \\ \text{divergent für} & \alpha \leq 1 \end{cases}$
2. $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}\ \delta\text{x} \begin{cases} \text{konvergent für} & \alpha < 1 \\ \text{divergent für} & \alpha \geq 1 \end{cases}$

Aufgabe 51 Konvergiert $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{e^{\sqrt{x}} - 1}$?

uneigentlich bezüglich der unteren Grenze.

$$e^x \geq 1 + x \qquad \text{für } x \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow e^{\sqrt{x}} - 1 \geq \sqrt{x} \qquad \text{für } 0 < x \leq 1$$

d.h.

$$\frac{1}{e^{\sqrt{x}} - 1} \leq \frac{1}{\sqrt{x}} \qquad \text{für } 0 < x \leq 1$$

$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\ \delta\text{x}$ konvergiert (siehe Vergleichsreihe), da $\alpha = \frac{1}{2} < 1$

Majorantenkriterium $\Rightarrow$ Integral konvergiert

Aufgabe 52 Konvergiert $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-\cos x}}\ \delta\mathrm{x}$?

uneigentlich bezüglich der unteren Grenze

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \underbrace{\frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots}_{>0 \text{ für } 0<x\leq 1, \text{ da Leibniz-Reihe}}$$

d.h.

$$\cos x \geq 1 - \frac{x^2}{2} \qquad \text{für } 0 < x \leq 1$$

oder

$$\cos x = \cos\left(\frac{x}{2} + \frac{x}{2}\right) = \cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2}$$

$$= 1 - 2\sin^2\frac{x}{2}$$

d.h.

$$1 - \cos x = 2\sin^2\frac{x}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{1-\cos x}} = \frac{1}{\sqrt{2\sin^2\frac{x}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{2}} * \frac{1}{\sin\frac{x}{2}} \qquad \text{für } 0 < x \leq 1$$

$$\geq \frac{1}{\sqrt{2}} * \frac{1}{\frac{x}{2}} \qquad \text{da } \sin t \leq t,\ t \geq 0$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{x} \qquad \text{für } 0 < x \leq 1$$

$$\int_0^1 \frac{\sqrt{2}}{x}\ \delta\mathrm{x} \qquad \text{divergiert, da } \alpha = 1$$

Minorantenkriterium $\Rightarrow$ Integral divergiert

Aufgabe 53 Konvergiert $\int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{x}}\sin(x+\frac{1}{x})\ \delta\mathrm{x}$?

uneigentlich bezüglich der oberen Grenze

Es gilt:

$$\int_1^A \frac{1}{\sqrt{x}}\sin\left(x+\frac{1}{x}\right)\ \delta\mathrm{x} = \int_1^A \frac{1}{\sqrt{x}}\left(\sin x\cos\frac{1}{x} + \cos x\sin\frac{1}{x}\right)\ \delta\mathrm{x}$$

mit

$$\int_1^A \frac{1}{\sqrt{x}} \sin x \cos\frac{1}{x}\ \delta\mathrm{x} = \int_1^A \frac{\cos\frac{1}{x}}{\sqrt{x}} \sin x\ \delta\mathrm{x}$$

$$= \underbrace{-\cos x * \frac{\cos\frac{1}{x}}{\sqrt{x}}\Bigg|_1^A}_{\text{konvergent für } A\longrightarrow\infty} + \int_1^A \cos x \left(\frac{-\sin\frac{1}{x}}{\sqrt{x}} \left(-\frac{1}{x^2}\right) + \left(-\frac{1}{2}\right) \frac{\cos\frac{1}{x}}{x^{3/2}} \right)\ \delta\mathrm{x}$$

und

$$\left|\cos x \frac{\sin\frac{1}{x}}{x^{5/2}}\right| \le \frac{1}{x^{5/2}} \qquad \text{für } x \ge 1$$

$$\left|\frac{\cos x \cos\frac{1}{x}}{2x^{3/2}}\right| \le \frac{1}{2x^{3/2}} \qquad \text{für } x \ge 1$$

und

$$\left|\frac{1}{\sqrt{x}} \cos x \sin\frac{1}{x}\right| \le \frac{1}{\sqrt{x}}\frac{1}{x} = \frac{1}{x^{3/2}} \qquad \text{für } x \ge 1$$

$\int_1^\infty \frac{1}{x^{3/2}}\ \delta\mathrm{x}$ und $\int_1^\infty \frac{1}{x^{5/2}}\ \delta\mathrm{x}$ konvergieren, da $\alpha = \frac{3}{2} > 1$ bzw. $\alpha = \frac{5}{2} > 1$

Majorantenkriterium $\Rightarrow$ Integral konvergiert

Fourierreihen

Sei $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ mit der Periode $2L$ absolut integrierbar. Fourierreihe von f lautet:

$$S(f)(x) := a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \Big(a_n \cos\big(\frac{n\pi}{L}x\big) + b_n \sin\big(\frac{n\pi}{L}x\big)\Big)$$

mit den Fourierkoeffizienten

$$a_0 = \frac{1}{2L} \int_{-L}^{L} f(x)\ \delta\mathrm{x}$$

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(x) \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\ \delta\mathrm{x} \qquad n \in \mathbb{N}$$

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(x) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\ \delta\mathrm{x} \qquad n \in \mathbb{N}$$

Es gilt:

- Ist f auf $[-L, L]$ stückweise stetig und stückweise stetig differenzierbar, dann gilt:

$$S(f)(x) = \frac{1}{2}\Big(f(x+0) + f(x-0)\Big)$$

- Ist f gerade Funktion $\Rightarrow b_n = 0$ für $n \in \mathbb{N}$ und

$$a_0 = \frac{1}{L} \int_{0}^{L} f(x)\ \delta\mathrm{x}$$

$$a_n = \frac{2}{L} \int_{0}^{L} f(x) \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\ \delta\mathrm{x}$$

- Ist f ungerade Funktion $\Rightarrow a_n = 0$ für $n \in \mathbb{N}_0$ und

$$b_n = \frac{2}{L} \int_{0}^{L} f(x) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\ \delta\mathrm{x} \qquad n \in \mathbb{N}$$

Aufgabe 54 Entwickle

$$f(x) := x\cos x \qquad \text{für } -\pi < x \leq \pi$$

mit

$$f(x+2\pi) = f(x) \qquad \text{für } x \in \mathbb{R}$$

in eine Fourierreihe.

$$\Rightarrow L = \pi,\ f(x) = x\cos x \text{ ungerade Funktion auf } [-\pi,\pi], \quad \text{d.h. } a_n = 0 \text{ für } n \in \mathbb{N}_0$$

und

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x\cos x\sin(nx)\ \delta\mathrm{x}$$

Es ist

$$\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta) = 2\sin\alpha\cos\beta$$

d.h.

$$\alpha = nx, \qquad \beta = x$$

$$\Rightarrow b_n = \frac{2}{\pi} * \frac{1}{2}\int_0^\pi x\Big\{\sin\Big((n+1)x\Big) + \sin\Big((n-1)x\Big)\Big\}\ \delta\mathrm{x} \qquad \text{für } n \geq 2$$

$$= \frac{1}{\pi}\Bigg\{x\left(\frac{-1}{n+1}\cos\Big((n+1)x\Big) + \frac{-1}{n-1}\cos\Big((n-1)x\Big)\right)\Bigg|_0^\pi$$

$$+ \int_0^\pi \left(\frac{1}{n+1}\cos\Big((n+1)x\Big) + \frac{1}{n-1}\cos\Big((n-1)x\Big)\right)\ \delta\mathrm{x}\Bigg\}$$

$$= \frac{1}{\pi}\Bigg\{\pi\frac{(-1)^{n+2}}{n+1} + \pi\frac{(-1)^n}{n-1} + \underbrace{\frac{1}{(n+1)^2}\sin\Big((n+1)x\Big) + \frac{1}{(n-1)^2}\sin\Big((n-1)x\Big)\Bigg|_0^\pi}_{=0}\Bigg\}$$

$$= (-1)^n\left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n-1}\right) = (-1)^n\frac{2n}{n^2-1}$$

und

$$b_1 = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x\cos x\sin x\ \delta\mathrm{x} = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi x\sin(2x)\ \delta\mathrm{x}$$

$$= \frac{1}{\pi}\Bigg\{x\left(-\frac{1}{2}\right)\cos(2x)\Bigg|_0^\pi + \frac{1}{2}\int_0^\pi \cos(2x)\ \delta\mathrm{x}\Bigg\}$$

$$= -\frac{1}{2} + \frac{1}{2\pi}\left(\frac{1}{2}\sin(2x)\right)\Bigg|_0^\pi = -\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow S(f)(x) = -\frac{1}{2}\sin x + \sum_{n=2}^\infty (-1)^n\frac{2n}{n^2-1}\sin(nx)$$

Lineare Differenzialgleichungen, lineare Differenzialgleichungssysteme

Aufgabe 55 Bestimme allgemeine Lösung von

$$\underbrace{(x^2+1)}_{\neq 0}y' + xy = x(x^2+1)$$

$$\Rightarrow y' = -\frac{x}{x^2+1}y + x \qquad \text{lineare Differenzialgleichung 1. Ordnung auf } \mathbb{R}$$

$$= f(x) * y + g(x) \qquad f,\ g \text{ stetig auf } \mathbb{R}$$

1. homogene Lösung:

$$y_h{}' = -\frac{x}{x^2+1}y_h$$

d.h.

$$\frac{y_h{}'}{y_h} = -\frac{x}{x^2+1} \Rightarrow \ln|y_h(x)| = -\frac{1}{2}\ln(x^2+1) + \ln|c|$$

$$\Rightarrow y_h(x) = \frac{c}{\sqrt{x^2+1}} \qquad x \in \mathbb{R},\ c \in \mathbb{R}$$

2. Variation der Konstanten
Ansatz:

$$y(x) = \frac{c(x)}{\sqrt{x^2+1}} \qquad \text{Einsetzen in DGL}$$

$$\Rightarrow y' = \frac{c'}{\sqrt{x^2+1}} + c\Big(-\frac{1}{2}\Big)\frac{2x}{(x^2+1)^{3/2}}$$

$$\stackrel{!}{=} -\frac{x}{x^2+1} * \frac{c}{\sqrt{x^2+1}} + x$$

$$\Rightarrow c'(x) = x\sqrt{x^2+1}$$

d.h.

$$c(x) = \int x\sqrt{x^2+1}\ \delta\mathrm{x} = \frac{1}{3}(x^2+1)^{3/2} + c$$

$\Rightarrow$ allgemeine Lösung:

$$y(x) = \frac{1}{3}(x^2+1) + \frac{c}{\sqrt{x^2+1}} \qquad c \in \mathbb{R}$$

Aufgabe 56 Berechne allgemeine Lösung von

$$y''' + 3y'' - 4y = e^{-2x}$$

$Ly = 0:\ y''' + 3y'' - 4y = 0$ konstante Koeffizienten!

$\lambda^3 + 3\lambda^2 - 4 \stackrel{!}{=} 0$ charakteristisches Polynom

Nullstelle raten (für ganzzahlige Nullstellen Teiler von 4 ausprobieren) $\Rightarrow \lambda_1 = 1$

$$(\lambda^3 + 3\lambda^2 - 4) : (\lambda - 1) = \lambda^2 + 4\lambda + 4 = (\lambda + 2)^2$$

d.h. $\lambda_{2,3} = -2$

$\Rightarrow$ Fundamentalsystem lautet

$$e^x,\ e^{-2x},\ xe^{-2x}$$

d.h.

$$y_h(x) = c_1 e^x + (c_2 + c_3 x)e^{-2x} \qquad \text{mit } c_1,\ c_2,\ c_3 \in \mathbb{R}$$

2. spezielle Lösung von $Ly = f$

Grundlösungsverfahren (konstante Koeffizienten!)

Sei $y_{n-1}(x)$ die Lösung von $Ly = 0$ mit

$$y_{n-1}(0) = y'_{n-1}(0) = \ldots = y_{n-1}^{(n-2)}(0) = 0$$

und

$$y_{n-1}^{(n-1)}(0) = 1$$

Dann ist

$$y_{sp}(x) = \int_0^x y_{n-1}(x-t) f(t)\ \delta\text{t}$$

eine spezielle Lösung von $Ly = f$

Bei einer linearen DGL 10. Ordnung mit konstanten Koeffizienten setzt man z.B. die Lösung (der homogenen DGL) und die ersten 8 Ableitungen an der Stelle $x = 0$ Null und die 9. Ableitung setzt man gleich eins (an der Stelle $x = 0$).

$$y_h(x) = c_1 e^x + (c_2 + c_3 x)e^{-2x}$$

$$\Rightarrow y_h{}'(x) = c_1 e^x + (c_3 - 2c_2 - 2c_3 x)e^{-2x}$$

$$y_h{}''(x) = c_1 e^x + (-2c_3 - 2c_3 + 4c_2 + 4c_3 x)e^{-2x}$$

$$= c_1 e^x + (4c_3 x + 4c_2 - 4c_3)e^{-2x}$$

$$\Rightarrow y_h(0) = c_1 + c_2 = 0$$

$$y_h{}'(0) = c_1 - 2c_2 + c_3 = 0$$

$$y_h{}''(0) = c_1 + 4c_2 - 4c_3 = 1$$

$$\Rightarrow c_1 = \frac{1}{9}, c_2 = -\frac{1}{9}, c_3 = -\frac{1}{3}$$

d.h.

$$y_2(x) = \frac{1}{9}e^x - \Big(\frac{1}{9} + \frac{1}{3}x\Big)e^{-2x}$$

$$\Rightarrow y_{sp}(x) = \int_0^x y_2(x-t)f(t)\ \delta\mathrm{t}$$

$$= \int_0^x \left\{\frac{1}{9}e^{x-t} - \Big(\frac{1}{9} + \frac{1}{3}(x-t)\Big)e^{-2(x-t)}\right\}e^{-2t}\ \delta\mathrm{t}$$

$$= \frac{1}{9}e^x \int_0^x e^{-3t}\ \delta\mathrm{t} - e^{-2x}\int_0^x \Big(\frac{1}{9} + \frac{1}{3}(x-t)\Big)\ \delta\mathrm{t}$$

$$= -\frac{1}{27}e^x * e^{-3t}\Big|_0^x - e^{-2x}\left(\Big(\frac{1}{9} + \frac{x}{3}\Big)t - \frac{1}{6}t^2\right)\Big|_0^x$$

$$= -\frac{1}{27}e^{-2x} + \frac{1}{27}e^x - e^{-2x}\left(\frac{x}{9} + \frac{x^2}{3} - \frac{x^2}{6}\right)$$

$$= \underbrace{\frac{1}{27}(e^x - e^{-2x}) - \frac{x}{9}e^{-2x}}_{\text{in } \mathrm{y_h(x)} \text{ enthalten}} - \frac{1}{6}x^2e^{-2x}$$

$\Rightarrow$ 3. allgemeine Lösung:

$$y(x) = y_h(x) + y_{sp}(x)$$

$$= \mathbf{c_1e^x + (c_2 + c_3x)e^{-2x} - \frac{1}{6}x^2e^{-2x}} \qquad \text{mit } c_1,\ c_2,\ c_3 \in \mathbb{R}$$

Vorlesung 8 - 17.09.2001

Aufgabe 57 Gesucht allgemeine Lösung von $y'' + 4y' + 5y = e^{-2x} \sin x$

Lösung:

1) homogene Lösung

$$p(\lambda) = \lambda^2 + 4\lambda + 5 \stackrel{!}{=} 0$$

d.h.

$$\lambda_{1,2} = -2 \pm \sqrt{4-5} = -2 \pm i$$

$\Rightarrow e^{(-2+i)x},\ e^{(-2-i)x}$ bilden ein Fundamentalsystem

$Ly = 0$ reelle DGL

$$\Rightarrow \begin{array}{l} Re\left\{e^{(-2+i)x}\right\} = e^{-2x}\cos x \\ Im\{e^{(-2+i)x}\} = e^{-2x}\sin x \end{array}$$

bilden ein reelles Fundamentalsystem, d.h. $y_h(x) = c_1 e^{-2x}\cos x + c_2 e^{-2x}\sin x$ mit $c_1,\ c_2 \in \mathbb{R}$ ist die allgemeine (reelle) Lösung von $Ly = 0$

2a) Variation der Konstanten (allgemein gültig)

$y_{sp}(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i(x) y_i(x)$ mit $c_i(x) = \int \frac{\det W_i(x)}{\det W(x)}\ \delta\mathrm{x}$ ist spezielle Lösung von $Ly = f$ mit

$$\det W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \cdots & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \cdots & y_n'(x) \\ \vdots & & & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \cdots & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}$$

und

$$\det W_i(x) = \begin{vmatrix} \vdots & 0 & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & 0 & \vdots & \vdots \\ \vdots & f(x) & \vdots & \vdots \end{vmatrix}$$

i-te Spalte gegenüber $\det W(x)$ geändert

Mit $y_1(x) = e^{-2x}\cos x,\ y_2(x) = e^{-2x}\sin x$ gilt

$$\det W(x) = \begin{vmatrix} e^{-2x}\cos x & e^{-2x}\sin x \\ e^{-2x}(-2\cos x - \sin x) & e^{-2x}(-2\sin x + \cos x) \end{vmatrix}$$

$$= e^{-4x}(\cos^2 x - 2\sin x\cos x + 2\cos x\sin x + \sin^2 x) = e^{-4x}$$

$$\det W_1(x) = \begin{vmatrix} 0 & e^{-2x}\sin x \\ e^{-2x}\sin x & e^{-2x}(-\sin x + \cos x) \end{vmatrix} = -e^{-4x}\sin^2 x$$

und

$$\det W_2(x) = \begin{vmatrix} e^{-2x}\cos x & 0 \\ e^{-2x}(-2cosx - \sin x) & e^{-2x}\sin x \end{vmatrix} = e^{-4x}\cos x \sin x$$

$$Ly = f(x) = e^{-2x}\sin x$$

$$\Rightarrow c_1(x) = \int \frac{\det W_1(x)}{\det W(x)}\ \delta\text{x}$$

$$= \int (-\sin^2 x)\ \delta\text{x} = \int (-\sin x)\sin x\ \delta\text{x}$$

$$= \cos x \sin x - \int \underbrace{\cos^2 x}_{=1-\sin^2 x}\ \delta\text{x}$$

$$\Rightarrow -\int \sin^2 x\ \delta\text{x} = c_1(x)$$

$$= \frac{1}{2}(\cos x \sin x - x)$$

$$c_2(x) = \int \frac{\det W_2(x)}{\det W(x)}\ \delta\text{x} = \int \cos x \sin x\ \delta\text{x}$$

$$= \frac{1}{2}\int \sin(2x)\ \delta\text{x} = -\frac{1}{4}\cos(2x)$$

oder:

$$c_2(x) = \int \underbrace{\cos x}_{f'}\underbrace{\sin x}_{f}\ \delta\text{x} = \frac{1}{2}\sin^2 x$$

$$\Rightarrow y_{sp}(x) = c_1(x)y_1(x) + c_2(x)y_2(x)$$

$$= \frac{1}{2}(\cos x \sin x - x)e^{-2x}\cos x + \frac{1}{2}\sin^2 x e^{-2x}\sin x$$

$$= \frac{1}{2}e^{-2x}(-x\cos x + \underbrace{\cos^2 x \sin x + \sin^3 x}_{=\sin x(\cos^2 x + \sin^2 x) = \sin x})$$

$\frac{1}{2}e^{-2x}\sin x$ ist in $y_h(x)$ enthalten.

2b) Ansatz in Form der Störglieder
$Ly = f$ (konstante Koeffizienten in L!)

Satz

Ist $f(x) = e^{(\alpha+\beta)x}\sum_{k=0}^{l} a_k x^k$ und $\lambda = \alpha + i\beta$ eine Nullstelle der Ordnung $j \geq 0$ des charakteristischen Polynoms, so gibt es eine spezielle Lösung von $Ly = f$ von der Form

$$y_{sp}(x) = e^{(\alpha+\beta)x}\sum_{k=j}^{l+j} b_k x^k \qquad \text{für } b_k \in \mathbb{C}$$

$\lambda = -2 + i$: Nullstelle 1. Ordnung von $y(\lambda)$ d.h. $j = 1$ und

$$f(x) = e^{-2x} \sin x = Im e^{(-2+i)x}$$

$\Rightarrow l = 0$ und Resonansfall!

$Ly = e^{(-2+i)x}$: spezielle Lösung von der Form

$$y_{sp}(x) = bxe^{(-2+i)x}, \qquad \text{da } l = 0, j = 1$$

Einsetzen in DGL liefert

$$y'_{sp}(x) = e^{(-2+i)x}(b + (-2+i)bx)$$

$$y''_{sp}(x) = e^{(-2+i)x}(2b(-2+i) + (-2+i)^2 bx)$$

$y'' + 4y' + 5y = e^{(-2+i)x}$:

$\Rightarrow e^{(-2+i)x}\left\{2b(-2+i) + (4 - 4i - 1)bx + 4b + 4(-2+i)bx + 5bx\right\} = e^{(-2+i)x}$

$\Rightarrow 2bi = 1$, d.h. $b = \frac{1}{2i} = \frac{-i}{2}$

$\Rightarrow \ y_{sp}(x) = -\frac{i}{2}xe^{(-2+i)x}$

$Ly = f$ ist DGL mit reellen Koeffizienten

$$\Rightarrow y_{sp}(x) = Im\{\ y_{sp}(x)\}$$

$$= Im\{-\frac{i}{2}xe^{(-2+i)x}\}$$

$$= -\frac{x}{2}e^{-2x}\underbrace{Im\{ie^{ix}\}}_{=\cos x}$$

$$= -\frac{x}{2}e^{-2x}\cos x$$

3) $\Rightarrow y(x) = y_h(x) + y_{sp}(x)$

$$= c_1 e^{-2x}\cos x + c_2 e^{-2x}\sin x - \frac{x}{2}e^{-2x}\cos x \qquad \text{mit } c_1,\ c_2 \in \mathbb{R}$$

Reduktion der Ordnung

$Ly = 0$ sei lineare DGL 2. Ordnung mit nicht-konstanten Koeffizienten. $y_1(x) \neq 0$ sei eine (nicht-triviale) Lösung. Dann ergibt der Ansatz

$$y_2(x) = c(x) * y_1(x)$$

eine lineare DGL 1. Ordnung in $c'(x)$.

Aufgabe 58 Gesucht allgemeine Lösung von

$$x(1+x)y'' + (2+3x)y' + y = 0 \qquad \text{für } x > 0$$

Hinweis: $y_1(x) = \frac{1}{x}$ ist eine Lösung.

Ansatz:

$$y_2(x) = \frac{c(x)}{x}$$

$$\Rightarrow y_2'(x) = \frac{c'}{x} - \frac{c}{x^2}$$

$$y_2''(x) = \frac{c''}{x} - 2\frac{c'}{x^2} + 2\frac{c}{x^3}$$

Einsetzen in DGL liefert

$$x(1+x)\left(\frac{c''}{x} - 2\frac{c'}{x^2} + 2\frac{c}{x^3}\right) + (2+3x)\left(\frac{c'}{x} - \frac{c}{x^2}\right) + \frac{c}{x} = 0$$

$$= (1+x)c'' - 2\frac{1+x}{x}c' + (2+3x)\frac{1}{x}c'$$

$$= (1+x)c'' + c' \stackrel{!}{=} 0$$

$$u(x) := c'(x) \Rightarrow u' = -\frac{1}{1+x}u$$

d.h.

$$\frac{u'}{u} = -\frac{1}{1+x} \Rightarrow \ln|x| = -\ln|1+x|$$

d.h.

$$u(x) = \frac{1}{1+x} = c'(x)$$

$$\Rightarrow c(x) = \int \frac{\delta \mathrm{x}}{1+x} = \ln|1+x|$$

d.h.

$$y_2(x) = \frac{\ln(1+x)}{x} \qquad \text{für } x > 0$$

2. linear unabhängige Lösung

$\Rightarrow y(x) = c_1\dfrac{1}{x} + c_2\dfrac{\ln(1+x)}{x}$ für $x > 0$ mit $c_1,\ c_2 \in \mathbb{R}$ ist die allgemeine Lösung

lineare Differenzialgleichungssysteme

$\vec{x}'(t) = A(t)\vec{x}(t) + \vec{b}(t)$ mit $A(t)$ n×n-Matrix und $A(t),\ \vec{b}(t)$ stetig auf $I = [a,\ b]$.

1. **homogene Lösung**

   Ein System von Lösungen $\{\vec{x}_1(t)\dots\vec{x}_n(t)\}$ von $\vec{x}'(t) = A(t)\vec{x}(t)$ bildet eine Basis des Lösungsraumes, falls für ihre Wronski-Matrix $W(t)$ gilt:

   $$\det W(t) = \det(\vec{x}_1(t)\dots\vec{x}_n(t)) \neq 0$$

   Die allgemeine Lösung von $\vec{x}'(t) = A(t)\vec{x}(t)$ lautet:

   $$\vec{x}_h(t) = \sum_{i=1}^{n} c_i\vec{x}_i(t) mit c_1 \dots c_n \in \mathbb{R}$$

   Mit der Fundamentalmatrix

   $$\Phi(t,\ t_0) := W(t) * W(t_0)^{-1}$$

   gilt:

   $\vec{x}(t) = \Phi(t,\ t_0)\vec{x}_0$ ist die eindeutige Lösung des AWP's

   $$\vec{x}'(t) = A(t)\vec{x}(t)$$

   $$\vec{x}(t_0) = \vec{x}_0$$

   A konstante n×n-Matrix
   Ist $\vec{v}^{(1)}, \dots, \vec{v}^{(l)}$ eine Kette von Hauptvektoren der Jordanschen Normalform von A zum EW λ_0, so erhält man l linear unabhängige Lösungen des homogenen Systems durch

   $$\vec{x}_1(t) = e^{\lambda_0 t}\vec{v}^{(1)}$$

   $$\vec{x}_2(t) = e^{\lambda_0 t}\left\{\frac{t}{1!}\vec{v}^{(1)} + \vec{v}^{(2)}\right\}$$

   $$\vec{x}_3(t) = e^{\lambda_0 t}\left\{\frac{t^2}{2!}\vec{v}^{(1)} + \frac{t}{1!}\vec{v}^{(2)} + \vec{v}^{(3)}\right\}$$

   $$\vdots$$

   $$\vec{x}_l(t) = e^{\lambda_0 t}\left\{\frac{t^{l-1}}{(l-1)!}\vec{v}^{(1)} + \frac{t^{l-2}}{(l-2)!}\vec{v}^{(2)} + \dots + \frac{t}{1!}\vec{v}^{(l-1)} + \vec{v}^{(l)}\right\}$$

2. **eine spezielle Lösung des inhomogenen DGL-Systems**

   Variation der Konstanten
   Eine spezielle Lösung von $\vec{x}'(t) = A(t)\vec{x}(t) + \vec{b}(t)$ ist gegeben durch

   $$\vec{x}_{sp}(t) = \sum_{i=1}^{n} c_i(t)\vec{x}_i(t)$$

mit

$$c_i(t) = \int \frac{\det W_i(t)}{\det W(t)}\ \delta\text{t} \qquad\qquad \text{für } i = 1 \dots n$$

und

$$\det W_i(t) = \det\Big(\vec{x}_1(t), \dots, \underbrace{\vec{b}(t)}, \dots, \vec{x}_n(t)\Big)$$

i-te Spalte abgeändert!

Dabei ist $\{\vec{x}_1(t), \dots, \vec{x}_n(t)\}$ ein Fundamentalsystem (FS) von $\vec{x}'(t) = A(t)\vec{x}(t)$

3. Die allgemeine Lösung von $\vec{x}'(t) = A(t)\vec{x}(t) + \vec{b}(t)$ wird gegeben durch

$$\vec{x}(t) = \vec{x}_h(t) + \vec{x}_{sp}(t)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} c_i \vec{x}_h(t) + \vec{x}_{sp}(t)$$

Das AWP
$\vec{x}'(t) = A(t)\vec{x}(t) + \vec{b}(t)$
$\vec{x}(t_0) = \vec{x}_0$
hat die eindeutige Lösung

$$\vec{x}(t) = \Phi(t,\ t_0)\vec{x}_0 + \int_{t_0}^{t} \Phi(t,\ s)\vec{b}(s)\text{ds}$$

$$= \Phi(t, t_0)\vec{x}_0 + \sum_{i=1}^{n} \int_{t_0}^{t} \frac{\det W_i(s)}{\det W(s)} \text{ds} * \vec{x}_i(t)$$

Aufgabe 59 Bestimme Fundamentalsystem (FS) von Lösungen von $\vec{x}' = A\vec{x}$ mit

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & 5 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Eigenwerte

$$\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} -1-\lambda & 1 & 1 \\ -2 & -1-\lambda & 5 \\ -1 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= -(5 + 1 + \lambda) + (2 - \lambda)((1 + \lambda)^2 + 2)$$

$$= -6 - \lambda + (2-\lambda)(\lambda^2 + 2\lambda + 3)$$

$$= -\lambda^3 \stackrel{!}{=} 0$$

d.h. $\lambda_1 = 0,\ \mu_1 = 3$

Eigenvektoren: $(A - \lambda_1 E)\vec{x} = \vec{0}$

$$\begin{array}{rrr|l} -1 & 1 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 5 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 0 \end{array}$$

$\Rightarrow -3x_1 + 6x_3 = 0$

d.h.

$x_1 = 2x_3$

$x_2 = -2x_1 + 5x_3$

Wähle z.B. $x_3 = 1 \Rightarrow x_1 = 2,\ x_2 = 1$

d.h. $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ einziger linear unabhängiger Eigenvektor

Hauptvektoren

$$(A - vE)^2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 5 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 5 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -2 & -2 & 6 \\ -1 & -1 & 3 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \text{Kern } (A - vE)^2 = \ell\Big(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Big)$$

$(A - 0E)^3 = 0 \qquad$ (da $p_A(A) = 0$)

d.h. $\dim \text{Kern } (A - 0E)^3 = 3$

$\Rightarrow$ z.B. $\vec{v}_1^{(3)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \underbrace{\mathbb{R}^3}_{=\text{Kern } (A-0E)^3} \setminus \text{Kern } (A - 0E)^2$

$\Rightarrow \vec{v}_1^{(2)} = (A - 0E)\vec{v}_1^{(3)}$

$$= \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 5 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$$

und

$$\vec{v}_1^{(1)} = (A - 0E)\vec{v}_1^{(2)} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 5 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \vec{x}_1(t) = e^{\lambda_1 t}\vec{v}_1^{(1)} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$ (auch $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$)

$\vec{x}_2(t) = e^{\lambda_1 t}\left(\frac{t}{1!}\vec{v}_1^{(1)} + \vec{v}_1^{(1)}\right) = t\begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6t+1 \\ 3t+5 \\ 3t+2 \end{pmatrix}$

$\vec{x}_3(t) = e^{\lambda_1 t}\left(\frac{t^2}{2!}\vec{v}_1{}^{(1)} + \frac{t}{1!}\vec{v}_2{}^{(2)} + \vec{v}_1{}^{(3)}\right) = \begin{pmatrix} 3t^2 \\ \frac{3}{2}t^2 \\ \frac{3}{2}t^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t \\ 5t \\ 2t+1 \end{pmatrix}$

bilden ein Fundamentalsystem (FS), d.h.

$$\vec{x}(t) = c_1\vec{x}_1(t) + c_2\vec{x}_2(t) + c_3\vec{x}_3(t)$$

mit $c_1,\ c_2,\ c_3 \in \mathbb{R}$ ist die allgemeine Lösung von $\vec{x}' = A\vec{x}$.

Aufgabe 60 Bestimme die Lösung des AWPs

$$\left.\begin{aligned} x_1' &= x_1 + x_2 + e^t \sin 2t \\ x_2' &= -4x_1 + x_2 + 2e^t \cos 2t \end{aligned}\right\} \text{mit} \left\{\begin{aligned} x_1(0) &= 1 \\ x_2(0) &= 2 \end{aligned}\right.$$

Eigenwerte

$$\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ -4 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2 + 4$$

d.h. $\lambda_{1,2} = 1 \pm 2i$

Eigenvektoren

$\lambda_1 = 1 + 2i$:

$-2ix_1 + x_2 = 0$

$-4x_1 - 2ix_2 = 0$

d.h. $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2i \end{pmatrix}$

A reell $\Rightarrow$

$$\vec{x}_1(t) = Re\{e^{\lambda_1 t}\vec{v}_1\} = Re\{e^{(1+2i)t}\begin{pmatrix} 1 \\ 2i \end{pmatrix}\}$$

$$= e^t \begin{pmatrix} \cos 2t \\ -2\sin 2t \end{pmatrix}$$

$$\vec{x}_2(t) = Im\{e^{\lambda_1 t}\vec{v}_1\} = Im\{e^{(1+2i)t}\begin{pmatrix} 1 \\ 2i \end{pmatrix}\}$$

$$= e^t \begin{pmatrix} \sin 2t \\ -2\cos 2t \end{pmatrix}$$

bilden Fundamentalsystem (FS)

Lösung des homogenen AWPs:

a) $\vec{x}_h(t) = c_1 e^t \begin{pmatrix} \cos 2t \\ -2\sin 2t \end{pmatrix} + c_2 e^t \begin{pmatrix} \sin 2t \\ 2\cos 2t \end{pmatrix}$ mit $c_1,\ c_2 \in \mathbb{R}$

$$\vec{x}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

d.h. $c_1 = c_2 = 1$

$$\Rightarrow \vec{x}_h(t) = e^t \begin{pmatrix} \cos 2t + \sin 2t \\ 2\cos 2t - 2\sin 2t \end{pmatrix}$$

b) $\Phi(t,0) = W(t) * W(0)^{-1},\ W(t) = (\vec{x}_1(t), \vec{x}_2(t))$

d.h. $W(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow W(0)^{-1} = \frac{1}{+2}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \Phi(t,0) = e^t \begin{pmatrix} \cos 2t & \sin 2t \\ -2\sin 2t & 2\cos 2t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$= e^t \begin{pmatrix} \cos 2t & \frac{1}{2}\sin 2t \\ -2\sin 2t & \cos 2t \end{pmatrix}$$

d.h.

$$\vec{x}_h(t) = \Phi(t,0)\vec{x}_0 = e^t \begin{pmatrix} \cos 2t & \frac{1}{2}\sin 2t \\ -2\sin 2t & \cos 2t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$= e^t \begin{pmatrix} \cos 2t + \sin 2t \\ 2\cos 2t - 2\sin 2t \end{pmatrix}$$

spezielle Lösung von $\vec{x}'(t) = A\vec{x}(t) + \vec{b}(t)$ mit $\vec{x}_{sp}(0) = \vec{0}$

$$\det W(t) = \begin{vmatrix} e^t\cos 2t & e^t \sin 2t \\ -e^t 2\sin 2t & 2e^t\cos 2t \end{vmatrix}$$

$$= e^{2t}2(\cos^2 2t + \sin^2 t)$$

$$= 2e^{2t}$$

$$\det W_1(t) = \left| \vec{b}(t),\ \vec{x}_2(t) \right|$$

mit $\vec{b}(t) = e^t \begin{pmatrix} \sin 2t \\ 2\cos 2t \end{pmatrix} = \vec{x}_2(t)$

d.h. Resonansfall

d.h. $\det W_1(t) = 0$ und $\det W_2(t) = \det W(t)$

$\Rightarrow c_1(t) = 0,\ c_2(t) = t$

$\Rightarrow \vec{x}_{sp} = t\vec{b}(t) = te^t \begin{pmatrix} \sin 2t \\ 2\cos 2t \end{pmatrix}$ erfüllt $\vec{x}_{sp}(0) = \vec{0}$!

$\Rightarrow \vec{x}(t) = \vec{x}_h(t) + \vec{x}_{sp}(t)$ löst AWP

Vorlesung 9 - 18.09.2001

Bogenlänge

1. Es sei $\vec{x} = \gamma(t),\ a \le t \le b$, stetig differenzierbare Polardarstellung einer Kurve γ. Dann ist

$$L(\gamma) = \int_a^b |\gamma'(t)|\ \delta\mathrm{t}$$

ihre Länge.

2. Die Kurve γ sei in Polarkoordinaten gegeben.

$$\gamma(\varphi): \quad \begin{array}{c} x = r(\varphi)\cos\varphi \\ y = r(\varphi)\sin\varphi \end{array}, \alpha \le \varphi \le \beta$$

mit $r(\varphi)$ stetig differenzierbar auf $[\alpha,\ \beta]$.

Dann ist

$$L(\gamma) = \int_\alpha^\beta \sqrt{r^2(\varphi) + r'^2(\varphi)} d\varphi$$

Aufgabe 61 Berechne die Länge der Kurve γ, gegeben durch ihre Spur

$$\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; (x^2+y^2)^2 - 2x(x^2+y^2) - y^2 = 0 \right\}$$

Polarkoordinaten:

$\begin{array}{c} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{array}$ Einsetzen in die Spur ergibt

$$x^2 + y^2 = r^2$$

d.h.

$$r^4 - 2r\cos\varphi * r^2 - r^2\sin^2\varphi = 0$$

d.h.

$$r^2 - 2r\cos\varphi - \sin^2\varphi = 0$$

$\Rightarrow r_{1,2} = \cos\varphi \pm \sqrt{\cos^2\varphi + \sin^2\varphi} = \cos\varphi \pm 1$

Wegen $r(\varphi) \ge 0$ ist nur $r(\varphi) = 1 + \cos\varphi, \qquad 0 \le \varphi \le 2\pi$ möglich.

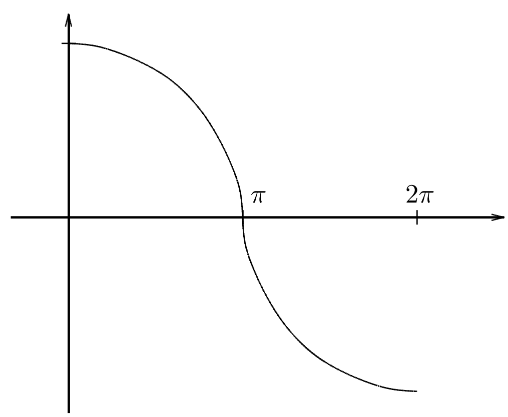
$\Rightarrow r'(\varphi) = -\sin\varphi$, d.h.

$$\begin{aligned} r^2(\varphi) + r'^2(\varphi) &= (1+\cos\varphi)^2 + \sin^2\varphi \\ &= 1 + 2\cos\varphi + \underbrace{\cos^2\varphi + \sin^2\varphi}_{=1} \\ &= 2(1+\cos\varphi) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow L(\gamma) = \int_0^{2\pi} \sqrt{2(1+\cos\varphi)}d\varphi$$

$$\left[\begin{array}{ll} \cos\varphi & = \cos(\frac{\varphi}{2} + \varphi 2) = \cos^2\frac{\varphi}{2} - \sin^2\frac{\varphi}{2} \\ & = \cos^2\frac{\varphi}{2} - (1-\cos^2\frac{\varphi}{2}) \\ & = 2\cos^2\frac{\varphi}{2} - 1 \\ \text{d.h.} & 1+\cos\varphi = 2\cos^2\frac{\varphi}{2} \end{array}\right.$$

$$\Rightarrow L(\gamma) = 2\int_0^{2\pi} |\cos\frac{\varphi}{2}|d\varphi$$
$$= 4 * \int_0^{\pi} \cos\frac{\varphi}{2}\, d\varphi \text{ aus Symmetrie}$$
$$= 8\sin\frac{\varphi}{2}\Big|_0^{\pi} = 8$$



Differenzierbarkeit bei mehreren Veränderlichen

f ist in $\vec{x}_0$ differenzierbar, falls

$$f(\vec{x}_0 + \vec{h}) = f(\vec{x}_0) + \nabla f(\vec{x}_0) * \vec{h} + R(\vec{h}) \qquad \text{mit } \lim_{\vec{h}\longrightarrow 0} \frac{R(\vec{h})}{|\vec{h}|} = 0$$

(Weierstraß'sche Zerlegungsformel)

f definiert in Umgebung $U(\vec{x}_0)$.

$$\nabla f(\vec{x}_0) = \left(\frac{\delta f}{\delta x_1},\ \frac{\delta f}{\delta x_2},\ \ldots,\ \frac{\delta f}{\delta x_n}\right)(\vec{x}_0)$$

Satz Sind die partiellen Ableitungen $\frac{\delta f}{\delta x_1}, \ \ldots, \ \frac{\delta f}{\delta x_n}$ alle in $\vec{x}_0$ stetig, so ist f in $\vec{x}_0$ differenzierbar (nur **hinreichend**).

Aufgabe 62 Untersuche $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ mit

$$f(x,\ y) = \begin{cases} xy \sin \dfrac{1}{xy} & \text{für } xy \neq 0 \\ 0 & \text{für } xy = 0 \end{cases}$$

auf differenzierbarkeit im Nullpunkt. Existiert

$$\frac{\delta f}{\delta x}(0,\ y_0) \qquad \text{für } y_0 \neq 0$$

f ist in $\vec{0}$ differenzierbar, falls

$$f(x,y) = f(0,0) + \nabla f(0,0)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + R(x,y) \qquad \text{mit} \lim_{x,y \longrightarrow 0} \frac{R(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$$

Es ist

$$\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x} = \frac{0-0}{x} \equiv 0$$

d.h.

$$\lim_{x \longrightarrow 0} \frac{f(x,0)-f(0,0)}{x} = \frac{\delta f}{\delta x}(0,0) = 0$$

und

$$\frac{f(0,y)-f(0,0)}{y} = \frac{0-0}{y} \equiv 0$$

d.h.

$$\lim_{y \longrightarrow 0} \frac{f(0,y)-f(0,0)}{y} = \frac{\delta f}{\delta y}(0,0) = 0$$

d.h. wegen $f(0,0) = 0$ folgt

$$R(x,y) = f(x,y)$$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow \frac{|R(x,y)|}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{|xy \sin \frac{1}{xy}}{\sqrt{x^2+y^2}} \\
&\leq \frac{|xy|}{\sqrt{x^2+y^2}} \\
&\leq \frac{\frac{1}{2}(x^2+y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}} \qquad \text{da } a^2+b^2 \geq 2ab \quad a,b \in \mathbb{R} \\
&= \frac{1}{2}\sqrt{x^2+y^2} \\
&\longrightarrow 0 \qquad \text{für } x,y \longrightarrow 0
\end{aligned}$$

$\Rightarrow f$ ist im Nullpunkt differenzierbar
Form ist für $y_0 \neq 0$

$$\frac{f(x,y_0)-f(0,y_0)}{x} = \frac{xy_0 \sin \frac{1}{xy_0} - 0}{x} = y_0 \sin \frac{1}{xy_0}$$

divergent für $x \Rightarrow 0,\ y_0 \neq 0$

$\Rightarrow \dfrac{\delta f}{\delta x}(0, y_0)$ existiert nicht für $y_0 \neq 0$, d.h. Satz über Stetigkeit der partiellen Ableitung nicht anwendbar.

Richtungsableitung

Definition: sei $f : U(\vec{x}_0) \longrightarrow \mathbb{R}$. Dann heißt

$$D\vec{v}\ f(\vec{x}_0) := \lim_{h \longrightarrow 0} \frac{1}{h}\Big(f(\vec{x}_0 + h\vec{v}) - f(\vec{x}_0)\Big)$$

Richtungsableitung von f in $\vec{x}_0$ in Richtung $\vec{v} \neq \vec{0}$.

Satz: Ist $f : U(\vec{x}_0) \longrightarrow \mathbb{R}$ und ist $f \in c_1(U)$, so gilt:

$$D\vec{v}\ f(\vec{x}_0) = \ <\nabla f^T(\vec{x}_0),\ \vec{v}> \qquad \text{für alle Richtungen } \vec{v} \neq \vec{0}$$

Aufgabe 63 Berechne alle Richtungsableitungen im Nullpunkt, sofern sie existieren, von

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \qquad \text{mit } f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{y\sin(xy)}{x^2 + y^4} & x^2 + y^2 > 0 \\ & \text{für} \\ 0 & x = y = 0 \end{cases}$$

Ist f stetig im Nullpunkt?

Stetigkeit in $\vec{0}$:

Es ist $f(y^2, y) = \dfrac{y\sin(y^3)}{2y^4} = \dfrac{\frac{1}{2}\sin(y^3)}{y^3} \longrightarrow \dfrac{1}{2} \neq f(0,0) = 0$ da $\lim\limits_{t \longrightarrow 0} \dfrac{\sin t}{t} = 1$

$\Rightarrow f$ ist in $\vec{0}$ unstetig und daher nicht differenzierbar in $\vec{0}$.

Richtungsableitung in $\vec{0}$:

mit $\vec{v} = \binom{v_1}{v_2} \neq \vec{0}$ gilt:

$$\begin{aligned} D\vec{v}\ f(\vec{0}) &= \lim_{h \longrightarrow 0} \frac{1}{h}\Big\{f(h\vec{v}) - f(\vec{0})\Big\} \\ &= \lim_{h \longrightarrow 0} \frac{1}{h}\left(\frac{hv_2 \sin(hv_1 hv_2)}{h^2{v_1}^2 + h^4{v_2}^4} - 0\right) \\ &= v_2 * \lim_{h \longrightarrow 0} \frac{\sin(h^2 v_1 v_2)}{h^2{v_1}^2 + h^4{v_2}^4} \end{aligned}$$

$$= 0 \qquad \text{für } v_1 = 0,\ v_2 \neq 0$$

Für $v_1 = 0$ gilt:

$$\begin{aligned} D\vec{v}\ f(\vec{0}) &= v_2 * \lim_{h \longrightarrow 0} \frac{h^2 v_1 v_2 + O(h^6)}{h^2{v_1}^2 + h^4{v_2}^4} \\ &= v_2 * \lim_{h \longrightarrow 0} \frac{v_1 v_2 + O(h^4)}{{v_1}^2 + h^2{v_2}^4} \end{aligned}$$

$$= v_2 \frac{v_1 v_2}{{v_1}^2} = \frac{{v_2}^2}{v_1} \qquad \text{für } v_1 \neq 0$$

$\Rightarrow$ In $\vec{0}$ existieren alle Richtungsableitungen, obwohl f dort unstetig ist.